Линеарна алгебра 1

десето предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Пермутације скупа

Нека је X непразан скуп.

Дефиниција

- *Свака бијекција скупа X се зове пермутација скупа X.*
- $S_n \overset{\text{def}}{=} \{\sigma \mid \sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ *и σ је бијекција*$\}$ - *скуп свих пермутација скупа $X = \{1, 2, \ldots, n\}$*

Теорема

$(S_n, \circ)$ *је група (где је операција $\circ$ композиција функција).*

Дефиниција

Група $(S_n, \circ)$ се зове симетрична група степена n.

Пермутацију $\sigma \in S_n$ записујемо у облику
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, или краће
$\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$.

Дефиниција

- *Пар* $(\sigma(i), \sigma(j))$ *представља инверзију пермутације* σ *ако важи*
$$i < j, \quad \sigma(i) > \sigma(j),$$
тј. инверзију чине свака два елемента пермутације који нису у свом природном поретку из скупа $\mathbb{N}$.
- *Са* $inv(\sigma)$ *означаваћемо скуп свих инверзија пермутације* σ.
- *Пермутација је парна ако садржи паран број инверзија.*
- *Ако је број инверзија непаран, пермутација је непарна.*

Може се показати да је композиција пермутација исте парности парна пермутација, а композиција пермутација различите парности непарна пермутација.

Дефиниција

Пресликавање $sgn : S_n \to \{-1, 1\}$ *дефинисано са*

$$sgn(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \sigma \text{ је парна пермутација} \\ -1, & \sigma \text{ је непарна пермутација} \end{cases} \quad \text{тј. } sgn(\sigma) = (-1)^{|inv(\sigma)|}$$

ћемо звати знак пермутације.

Пример

Посматрајмо пермутације скупа $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- *За* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *важи*

  $$inv(\sigma) = \big\{(4,3), (4,1), (4,2), (3,1), (3,2), (5,1), (5,2)\big\},$$

  па је σ *непарна пермутација, тј.* $sgn(\sigma) = -1$.
- *За* $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ *важи*

  $$inv(\tau) = \big\{(4,3), (4,1), (4,2), (3,1), (3,2), (5,2)\big\},$$

  па је τ *парна пермутација, тј.* $sgn(\tau) = 1$.
- *За* $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *важи* $inv(\mathbf{1}) = \emptyset$, *па је* $\mathbf{1}$ *парна пермутација.*

Дефиниција

Нека су $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Пермутација* $\tau \in S_n$ *облика*

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix}$$

зове се транспозиција.

Свака пермутација је композиција коначног броја транспозиција.

Особине знака пермутације су дате следећом теоремом:

Теорема

За $\sigma, \tau \in S_n$ *важи*

(1) $sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$,

(2) $sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$,

(3) *Ако је* τ *транспозиција, онда је* $sgn(\tau) = -1$.

Доказ.

(1)

- σ и τ исте парности $\Rightarrow$ $\sigma \circ \tau$ је парна пермутација $\Rightarrow$ $sgn(\sigma \circ \tau) = 1 = 1 \cdot 1 = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$ (σ и τ парне) или $sgn(\sigma \circ \tau) = 1 = (-1) \cdot (-1) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$ (σ и τ непарне)
- σ и τ различите парности $\Rightarrow$ $\sigma \circ \tau$ је непарна пермутација $\Rightarrow$ $sgn(\sigma \circ \tau) = -1 = 1 \cdot (-1) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$

(2)

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathbf{1}, sgn(\mathbf{1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma^{-1}) = 1$$
$$\Rightarrow \quad sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma).$$

Доказ.

(3) за $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & j-1 & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & i+1 & \dots & j-1 & i & \dots & n \end{pmatrix}$

важи

$$inv(\tau) = \{ \quad (j, i+1), (j, i+2), \dots, (j, \underbrace{i + (j-i-1)}_{=j-1}), (j, i),$$
$$(i+1, i), (i+2, i), \dots, (\underbrace{i + (j-i-1}_{j-1}, i)\}$$

$\Rightarrow \quad |inv(\tau)| = 2(j-i-1) + 1,$

$\Rightarrow \quad \tau$ је непарна пермутација. $\square$

Детерминанте, дефиниција и основна својства

Дефиниција

Нека је $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$. *Детерминанту матрице* A *дефинишемо на следећи начин*

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{def}{=} \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Из дефиниције непосредно добијамо:
За $n = 1$ тривијално важи $|a_{11}| = a_{11}$.

За $n = 2$ важи $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, па је

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

За $n = 3$:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

што се може записати и у облику

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Излажемо особине детерминанти које ће нам олакшати њихово израчунавање.

Теорема

$det(A^T) = detA.$

Теорема

Ако се матрица B *добија из* A *пермутацијом* τ *врста (колона) матрице* A*, онда је*

$$detB = sgn(\tau)detA.$$

Последица 1.

$$B = v_{ij}(A) \quad \Rightarrow \quad detB = -detA,$$

тј. ако две врсте (колоне) матрице замене места њена детерминанта мења знак.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Последица 2. Ако су две врсте (колоне) матрице A једнаке, онда је њена детерминанта једнака 0 (уз услов да $char(F) \neq 2$).

Теорема

$$B = v_i^{\lambda}(A) \quad \Rightarrow \quad detB = \lambda detA,$$

тј. детерминанта се множи скаларом тако што се сви елементи једне врсте (колоне) помноже тим скаларом.

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказ.

$$detB = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (\lambda a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} = \lambda detA. \square$$

Последица 1. Ако су две врсте (колоне) матрице A пропорционалне, тада је $detA = 0$.

Доказ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0$$

Последица 2. За сваку матрицу $A \in M_n(F)$ и скалар $\lambda \in F$ важи

$$det(\lambda A) = \lambda^n det A.$$

Доказ.

$$\begin{aligned} det(\lambda A) &= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\lambda \dots \lambda}_{n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n det A \square \end{aligned}$$

Теорема

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \ldots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ b_{i1} & \ldots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ c_{i1} & \ldots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Последица 1. $det(A+B) \neq detA + detB$ (у општем случају) тј. $det : M_n(F) \rightarrow F$ није линеарна функционела.

Последица 2. $B = v_{ij}^{\lambda}(A) \quad \Rightarrow \quad detA = detB,$ тј. ако све елементе неке врсте (колоне) матрице A помножимо скаларом и додамо одговарајућим елементима неке друге врсте (колоне) матрице A, детерминанта матрице A се неће променити.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема

За матрице $A, B \in M_n(F)$ *важи* $det(AB) = detA \cdot detB$.

Последица. Ако је матрица A регуларна, онда

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}.$$

Доказ.

A је регуларна

$\Rightarrow \ A \cdot A^{-1} = I_n$

$\Rightarrow \ detA \cdot det(A^{-1}) = detI_n = 1$ (претх. теорема)

$\Rightarrow \ det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}.\square$