

УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

Литература за предмет:

1. Емилија Нешовић, Увод у геометрију, уџбеник, ПМФ Крагујевац, 2020.
2. Владимир Стојановић, Збирка решених задатака за први разред средњих школа, Математископ, Београд, 2003.
3. М. Митровић, С. Огњановић, Геометрија за први разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2013.
4. Вене Богославов, Збирка решених задатака из математике 1, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2001.

1. Еуклидска геометрија и њене аксиоме

Еуклидска геометрија је геометријска теорија заснована на аксиомама које су подељене у пет група:

I аксиоме припадања или инциденције (прва група);

II аксиоме распореда или поретка (друга група);

III аксиоме подударности (трећа група);

IV аксиоме непрекидности (четврта група);

V аксиома паралелности (пета група).

Аксиоме су полазна тврђења (полазне претпоставке) која се не доказују и чија се тачност подразумева.

Помоћу аксиома се применом правила закључивања изводе остала тврђења која се називају **теореме**.

1. Еуклидска геометрија и њене аксиоме

Први покушај да се дефинишу (искажу) аксиоме еуклидске геометрије настао је у 3. веку пре н.е. када је **Еуклид** у свом делу „Елементи” дефинисао **девет аксиома** и **пет постулата**. Они су чинили **основу тадашње геометрије**. Овај скуп аксиома и постулата није био потпун и касније је допуњен.

Први коректан скуп аксиома еуклидске геометрије осмислио је немачки математичар **Давид Хилберт** у својој књизи „Основи геометрије”, која је објављена 1899. године.

Тај скуп аксиома чини **основу данашње еуклидске геометрије**. Аксиоме тог скупа су подељене у пет група, као што је напоменуто.

1. Еуклидска геометрија и њене аксиоме

У аксиомама се користе појмови **тачка**, **права**, **раван** и **простор**.

Тачка, **права**, **раван** и **простор** су **полазни** геометријски појмови.

Тачке су **елементи** неког полазног скупа S , који се назива **простор**.

Праве и **равни** су **скупови тачака**, односно **подскупови** скупа S .

Раван у којој важе аксиоме еуклидске геометрије назива се **еуклидска раван** и означава са E^2 .

Простор у коме важе аксиоме еуклидске геометрије назива се **еуклидски простор** и означава са E^3 .

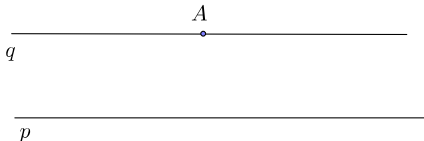
1. Еуклидска геометрија и њене аксиоме

Од свих аксиома еуклидске геометрије, споменућемо **аксиому паралелности** са којом смо се већ раније срели.

Аксиома паралелности припада петој групи аксиома.

Ову аксиому је увео (исказао) енглески математичар Џон Плејфер 1797. године, па је зато она позната и под називом **Плејферова аксиома паралелности**.

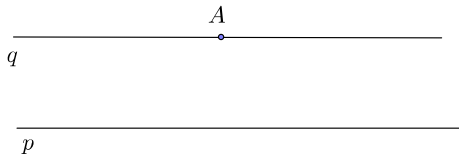
Аксиома 5.1.(Аксиома паралелности) Постоји права p и тачка A изван те праве, тако да у равни $\pi(p, A)$ постоји јединствена права q која садржи тачку A и не сече праву p .



1. Еуклидска геометрија и њене аксиоме

Паралелне праве у еуклидској равни се дефинишу као праве које се **не секу** или **се поклапају**. Зато се аксиома паралелности може исказати и на следећи начин.

Аксиома 5.1.(Аксиома паралелности) Постоји права p и тачка A изван те праве, тако да у равни $\pi(p, A)$ постоји јединствена права q која садржи тачку A и паралелна је правој p .



Слика 16. Аксиома паралелности

1. Еуклидска геометрија и њене аксиоме

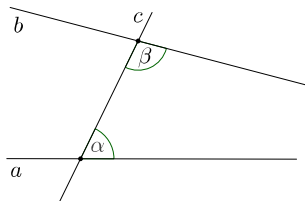
Аксиома паралелности је еквивалентна **Еуклидовом петом постулату**.

Другим речима, аксиома паралелности важи **ако и само ако** важи Еуклидов пети постулат.

Еуклидов пети постулат је уведен (дефинисан) у Еуклидовој књизи „Елементи” и гласи:

Ако две праве a и b у пресеку са правом c образују углове α и β који се налазе са исте стране праве c и чији је збир мањи од опруженог угла, тада се праве a и b секу са оне стране праве c на којој се налазе ти углови.

1. Еуклидска геометрија и њене аксиоме



Слика 17. Еуклидов пети постулат

Еуклидов пети постулат можемо укратко записати као следеће тврђење:

Ако је $\alpha + \beta < 180^\circ$, тада права a сече праву b .

1. Еуклидска геометрија и њене аксиоме

Од 3. века пре нове ере, па све до почетка 19. века сматрало се да је **Еуклидов пети постулат теорема** која се може доказати.

Покушаји математичара да се он докаже довели су до открића прве нееуклидске геометрије која се зове **хиперболичка геометрија** или **геометрија Гаус-Бољај-Лобачевског** у којој важи негација Еуклидовог петог постулата, а тиме и негација аксиоме паралелности.

Другим речима, у хиперболичкој геометрији важи **хиперболичка аксиома паралелности**, према којој кроз дату тачку изван дате праве p постоје **бар две праве које не секу праву p** .

У 19. веку је коначно закључено да је **Еуклидов пети постулат аксиома** и да се зато **не може доказати** помоћу осталих аксиома еуклидске геометрије.