# УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

## 2. Изометрије еуклидске равни

Подударне фигуре у еуклидској равни имају исти облик и исте су величине. С обзиром на ту особину, оне се могу поклопити помоћу трансформација које представљају одговарајуће кретање у еуклидској равни.

Трансформације помоћу којих се две подударне фигуре могу поклопити, називају се изометријске трансформације или изометрије.

Изометрије се обично дефинишу као бијективне трансформације које чувају дужину дужи.

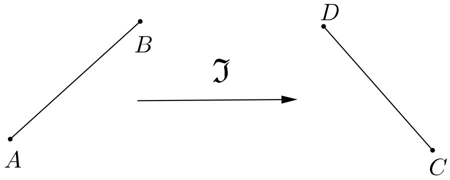
**Дефиниција 2.1.** Трансформација $\mathfrak{I} : A \to B$ је бијективна, ако је 1-1 и ,,на", односно ако важи:

(а) $(\forall x, y \in A)$ ако је $x \neq y$, тада је $\mathfrak{I}(x) \neq \mathfrak{I}(y)$ (1-1)

(б) $(\forall y \in B)$ $(\exists x \in A)$ тако да је $\mathfrak{I}(x) = y$ (,,на")

# 2. Изометрије еуклидске равни

**Дефиниција 2.2.** Бијективна трансформација $\mathfrak{I} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ се назива изометрија еуклидске равни, ако за сваке две тачке $A$ и $B$ и њихове слике $\mathfrak{I}(A) = C$ и $\mathfrak{I}(B) = D$ важи да је дуж $AB$ подударна дужи $CD$.




Слика 18. Изометријска трансформација

Подударне дужи су исте дужине.

Зато се каже да изометрије чувају дужину дужи, јер је дужина полазне дужи $AB$ једнака дужини њене слике $CD$.

Дефинисаћемо сада једну посебну трансформацију у еуклидској равни.

**Дефиниција 2.4.** Трансформација $\mathcal{E} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ са особином да је $\mathcal{E}(A) = A$ за сваку тачку $A$ у равни, назива се идентична трансформација или коинциденција.

**Теорема 2.3.** Коинциденција је изометрија еуклидске равни.

Можемо рећи да је коинциденција најједноставнија изометрија еуклидске равни, јер не помера тачке из њиховог првобитног положаја, па је зато дужина сваке дужи очувана.

Наводимо неке теореме које се односе на изометрије.

**Теорема 2.4.** Композиција две изометрије еуклидске равни је изометрија те равни.

**Теорема 2.5.** Инверзна трансформација $\mathfrak{I}^{-1}$ изометрије $\mathfrak{I}$ је изометрија.

Применом Теорема 2.3, 2.4 и 2.5 добијамо теорему која се назива основна теорема о изометријама равни и која гласи:

**Теорема 2.6.** Скуп свих изометрија еуклидске равни представља групу $(\mathfrak{I}, \circ)$ у односу на композицију тих трансформација.

О групи ће бити више информација у оквиру предмета Алгебарске структуре на другој години студија.

Поред тога што чувају дужину дужи, изометрије имају и следеће три особине, о којима говоре следеће три теореме.

**Теорема 2.8.** Изометрија пресликава колинеарне тачке у колинеарне тачке.

На основу претходне теореме следи да изометрије чувају колинеарност тачака. За три или више тачака се каже да су колинеарне, ако припадају истој правој.

**Теорема 2.7.** Ако важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, B, C)$ (тј. ако је тачка $B$ између тачака $A$ и $C$) и ако је $\mathfrak{I}$ изометрија еуклидске равни таква да је $\mathfrak{I}(A) = A'$, $\mathfrak{I}(B) = B'$, $\mathfrak{I}(C) = C'$, тада је $\mathcal{B}(A', B', C')$ (тј. тачка $B'$ је између тачака $A'$ и $C'$).

На основу претходне теореме следи да изометрије чувају распоред тачака на правој.

**Теорема 2.9.** Изометрија пресликава паралелне праве у паралелне праве.

На основу претходне теореме следи да изометрије чувају паралелност правих.

Помоћу изометрија се уводи релација „подударности геометријских фигура". Геометријска фигура је произвољан скуп тачака.

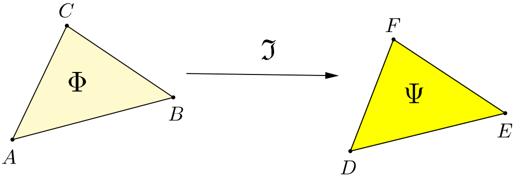
**Дефиниција 2.5.** Геометријске фигуре $\Phi$ и $\Psi$ у еуклидској равни су подударне, у ознаци $\Phi \cong \Psi$, ако постоји изометрија $\mathfrak{I} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ таква да је $\mathfrak{I}(\Phi) = \Psi$.

**Теорема 2.12.** Релација подударности геометријских фигура је релација еквиваленције.

**Доказ.** Доказаћемо да је релација подударности фигура рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Доказаћемо најпре рефлексивност. На основу Теореме 2.3 знамо да је коинциденција $\mathcal{E}$ изометрија, а на основу Дефиниције 2.4 је $\mathcal{E}(\Phi) = \Phi$. Отуда на основу Дефиниције 2.5 следи да је $\Phi \cong \Phi$ чиме је доказана рефлексивност.

Доказаћемо сада симетричност. Претпоставимо да је $\Phi \cong \Psi$. На основу Дефиниције 2.5, постоји изометрија $\mathfrak{I}$ равни таква да је $\mathfrak{I}(\Phi) = \Psi$.



Пошто је изометрија $\mathfrak{I}$ бијективна трансформација, постоји њој инверзна трансформација $\mathfrak{I}^{-1}$ која је такође изометрија (на основу Теореме 2.5). Како је $\mathfrak{I}(\Phi) = \Psi$, следи да је $\mathfrak{I}^{-1}(\Psi) = \Phi$. Сада на основу Дефиниције 2.5 следи да је $\Psi \cong \Phi$, чиме је доказана симетричност.

Да бисмо доказали транзитивност, претпоставимо да је $\Phi \cong \Psi$ и $\Psi \cong \Omega$. Тада на основу Дефиниције 2.5 постоје изометрије $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$ такве да је $\mathfrak{I}_1(\Phi) = \Psi$ и $\mathfrak{I}_2(\Psi) = \Omega$.

На основу Теореме 2.4 следи да је композиција $\mathfrak{I}_2 \circ \mathfrak{I}_1$ изометрија. Како је

$$(\mathfrak{I}_2 \circ \mathfrak{I}_1)(\Phi) = \mathfrak{I}_2(\mathfrak{I}_1(\Phi)) = \mathfrak{I}_2(\Psi) = \Omega,$$

применом Дефиниције 2.5 добијамо да је $\Phi \cong \Omega$, чиме је доказана транзитивност. $\square$

Такође важи и следећа теорема.

**Теорема 2.10.** Изометрија еуклидске равни пресликава:

(а) дуж у подударну дуж;

(б) полуправу у полуправу;

(в) угао у подударан угао;

(г) полураван у полураван;

(д) троугао у подударан троугао.

**Напомена**: Сваке две полуправе су подударне, сваке две полуравни су подударне, сваке две равни су подударне.

**Пример**: Објаснити зашто су сваке две полуправе подударне.