

УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

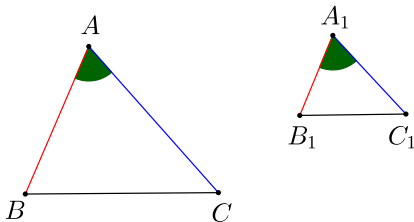
Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Постоје **четири става сличности троуглова**. Они су **аналогни** ставовима подударности троуглова.

Став 1 (СУС) Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слична, ако су две странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла, а углови између тих страница подударни.



$$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1, \quad \alpha \cong \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Ако су троуглови слични на основу става СУС, тако да је

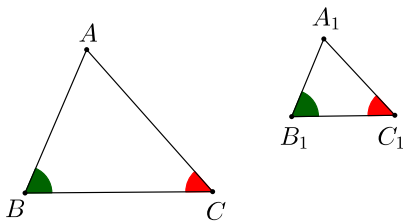
$$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1, \quad \alpha \cong \alpha_1,$$

тада из те сличности следи да је

$$BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1, \quad \beta \cong \beta_1, \quad \gamma \cong \gamma_1.$$

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Став 2 (УУ) Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слична, ако су два угла једног троугла подударна угловима другог троугла.



$$\beta \cong \beta_1, \quad \gamma \cong \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Ако су троуглови слични на основу става УУ,

тада из те сличности следи да је

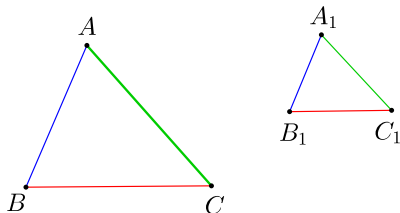
$$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = k \in R^+,$$

односно странице које се налазе наспрам подударних углова су пропорционалне.

Напомена: Ако су два угла првог троугла подударна угловима другог троугла, тада је и трећи угао првог троугла подударан трећем углу другог троугла, јер је збир углова у троуглу 180° .

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Став 3 (ССС) Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слична, ако су све странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла.



$$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

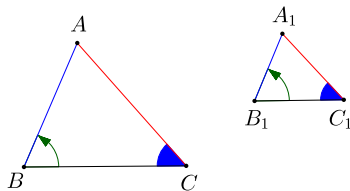
Ако су троуглови слични на основу става ССС, **тада из те сличности следи** је

$$\alpha \cong \alpha_1, \quad \beta \cong \beta_1, \quad \gamma \cong \gamma_1,$$

односно углови који се налазе наспрам пропорционалних страница су подударни.

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Став 4 (ССУУ) Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слична, ако су две странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла, углови наспрам једног пара пропорционалних страница подударни, а углови наспрам другог пара пропорционалних страница исте врсте.



$$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1, \quad \gamma \cong \gamma_1, \quad \beta \text{ и } \beta_1 \text{ исте врсте}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Ако су троуглови слични на основу става ССУУ, тако да је

$$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1, \quad \gamma \cong \gamma_1, \quad \beta \text{ и } \beta_1 \text{ исте врсте,}$$

тада из те сличности следи је

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1, \quad \alpha \cong \alpha_1, \quad \beta \cong \beta_1.$$

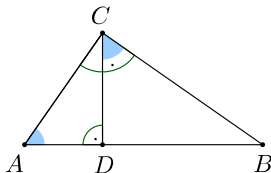
17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Ставови сличности троуглова имају **велику примену** у доказима многих теорема, од којих наводимо следеће.

Теорема 8.23. Ако је $\triangle ABC$ правоугли троугао, тада је:

(а) катета геометријска средина хипотенузе и нормалне пројекције те катете на хипотенузу, тј. $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.

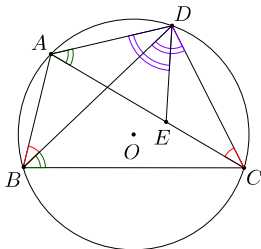
(б) висина која одговара хипотенузи геометријска средина одсечака на хипотенузи, тј. $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$.



17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Обрнута Питагорина теорема. Ако у троуглу $\triangle ABC$ важи $AC^2 = AB^2 + BC^2$, тада је $\triangle ABC$ правоугли троугао са правим углом у темену B .

Птоломејева теорема. Ако је $ABCD$ тетивни четвороугао, тада је производ његових дијагонала d_1 и d_2 једнак збиру производа његових наспрамних страница, тј.
 $d_1 \cdot d_2 = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.



17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Помоћу ставова сличности троуглова може се доказати да су код произвољног троугла значајне тачке H , T и O колинеарне, при чему важи $HT : TO = 2 : 1$.

Права која садржи тачке H , T и O , назива се Ојлерова права троугла.

Теорема 8.24. Ако је H ортоцентар, T тежиште и O центар описаног круга троугла $\triangle ABC$, тада су H , T и O колинеарне тачке такве да је $HT : TO = 2 : 1$.

Доказ. Претпоставимо да је H ортоцентар, T тежиште и O центар описаног круга троугла $\triangle ABC$.

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Такође је $AH \perp BC$ и $BH \perp AC$, јер је H ортоцентар троугла. Како је $DB \perp BC$ и $AH \perp BC$, следи да је $AH \parallel DB$.

Аналогно је $BH \parallel DA$, па је четвороугао $BHAD$ паралелограм. Како су наспрамне странице паралелограма подударне, имамо да је $AH \cong BD$. Нека је A_1 средиште странице BC . Тада је OA_1 средња линија троугла $\triangle DBC$, одакле следи да је $2DB \cong OA_1$ и $DB \parallel OA_1$. На основу релација $DB \parallel OA_1$ и $DB \parallel AH$, добијамо да је $OA_1 \parallel AH$.

Применом става сличности троуглова СУС, налазимо да је $\triangle AHT \sim \triangle TA_1O$, јер је $AT : TA_1 = AH : OA_1 = 2 : 1$ и $\sphericalangle HAT \cong \sphericalangle TA_1O$ (наизменични углови на трансверзали AA_1). Из сличности троуглова следи да је и преостали пар њихових страница пропорционалан, тј. $HT : TO = 2 : 1$, као и да су углови $\sphericalangle HTA$ и $\sphericalangle A_1TO$ подударни.

17. Ставови сличности троуглова и њихове примене

Због колинеарности тачака A , T и A_1 , угао $\sphericalangle ATA_1$ је опружен. Како је

$$\sphericalangle ATA_1 = \sphericalangle ATO + \sphericalangle A_1TO = \sphericalangle ATO + \sphericalangle HTA = \sphericalangle HTO,$$

следи да је и угао $\sphericalangle HTO$ опружен, што значи да су тачке H , T и O колинеарне. $\square$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нека су $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ два троугла таква да је $AB : A'B' = AC : A'C' = CD : C'D'$, где су D и D' средишта страница AB и $A'B'$ редом. Доказати да је $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
2. Да ли је троугао $\triangle ABC$ чије су странице дужина 3 cm , 4 cm и 6 cm , сличан троуглу $\triangle A_1B_1C_1$ чије су странице дужина $4,8\text{ cm}$, $3,6\text{ cm}$ и $7,2\text{ cm}$?
3. Око троугла $\triangle ABC$ је описан круг. Ако је N средиште кружног лука $\widehat{BC}$ који не садржи теме A и E пресечна тачка праве AN и странице BC , доказати да је $\triangle ABN \sim \triangle BEN$.
4. Ако је $ABCD$ паралелограм, а E и F тачке у којима круг описан око троугла $\triangle ABC$ сече праве AD и CD , доказати да је $\triangle EBC \sim \triangle EFD$.