УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

4. Подударност углова

Угао је један од основних појмова у планиметрији. Он се дефинише помоћу угаоне линије и релације ,,са исте стране угаоне линије" .

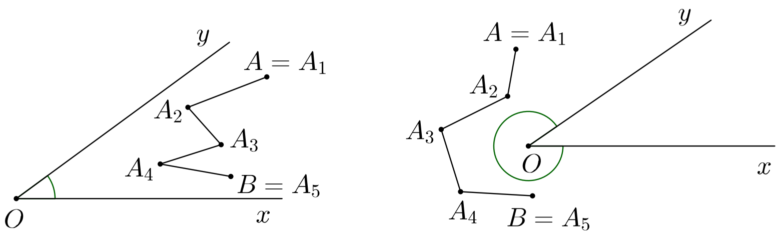
Дефиниција 1. Угаона линија $\angle xOy$ је унија две полуправе Ox и Oy које имају заједничку почетну тачку.

Да бисмо увели релацију ,,са исте стране угаоне линије", потребна нам је полигонска линија.

Дефиниција 2. Полигонска линија $A_1A_2\ldots A_n$ је унија дужи A_1A_2, A_2A_3, ...,$A_{n-1}A_n$, при чему су сваке три узастопне тачке те линије неколинеарне и $n \geq 3$.

4. Подударност углова

Дефиниција 3. Нека су у равни π дате тачке A и B и угаона линија $\angle xOy$. Тачке A и B су „са исте стране угаоне линије” $\angle xOy$, ако постоји полигонска линија $A_1A_2\dots A_n$ која их спаја и не сече ту угаону линију (слика 31).



Слика 31

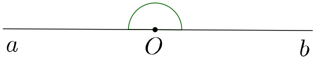
4. Подударност углова

Дефиниција 4. Угао је унија угаоне линије и скупа тачака у равни које се налазе са исте стране угаоне линије.

Полуправе које чине угаону линију се зову краци угла, а њихова заједничка почетна тачка је теме угла.

Дефиниција 5. Углови су комплементни, ако је њихов збир 90°, односно суплементни ако је њихов збир 180°.

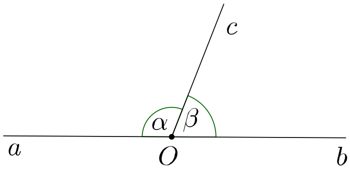
Дефиниција 6. Угао је опружен, ако је његова угаона линија права линија.



Слика 32. Опружен угао

4. Подударност углова

Дефиниција 7. Углови су напоредни (упоредни), ако имају један заједнички крак и ако друга два крака тих углова одређују праву линију.



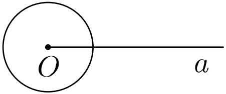
Слика 35. Напоредни углови α и β

Ако су углови напоредни, тада су они суплементни.

Угао напоредан опруженом углу је угао од 0°.

4. Подударност углова

Дефиниција 8. Угао је пун, ако је збир два опружена угла.

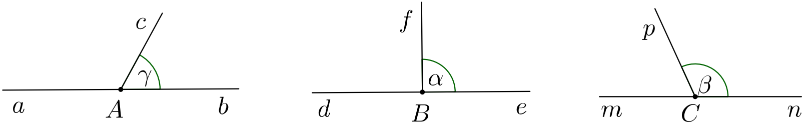


Слика 34. Пун угао

Сваки пун угао има 360°.

4. Подударност углова

Дефиниција 9. Угао је оштар, прав или туп, ако је редом мањи, подударан или већи од свог напоредног угла.

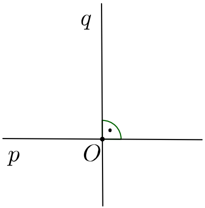


Слика 36. Оштар, прав и туп угао

Помоћу правог угла се уводе нормалне (ортогоналне, управне) праве.

4. Подударност углова

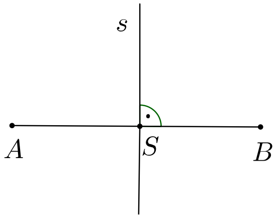
Дефиниција 10. Праве p и q у еуклидској равни $\mathbb{E}^2$ су нормалне (ортогоналне, управне), у ознаци $p \perp q$, ако садрже краке неког правог угла.



Слика 37. Ортогоналне праве

Користећи нормалност правих, можемо дефинисати симетралу дужи.

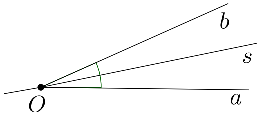
Дефиниција 11. Симетрала дужи (медијатриса) је права која је нормална на дуж и садржи њено средиште (слика 38).



Слика 38. Симетрала дужи

Произвољна дуж има јединствену симетралу која је њена оса симетрије.

Дефиниција 12. Симетрала угла је права која угао дели на два подударна угла.



Слика 39. Симетрала угла

Произвољан угао има јединствену симетралу, која је његова оса симетрије.

Полуправа која полови угао назива се бисектриса.

Следеће три теореме говоре о подударним угловима.

Теорема 2.19. Напоредни углови подударних углова су подударни.

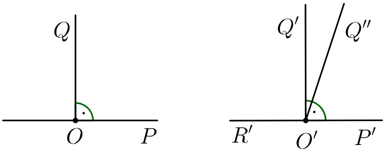
Теорема 2.20. Угао подударан правом углу је прав.

Теорема 2.21. Прави углови су међусобно подударни.

Доказаћемо Теорему 2.21.

Доказ. Претпоставимо да су углови $\sphericalangle POQ$ и $\sphericalangle P'O'Q'$ прави.

Супротно тврђењу теореме, претпоставимо да они нису подударни (тј. да нису једнаки). Нека је $\sphericalangle P'O'Q' > \sphericalangle POQ$ (слика 41).



Слика 41

Тада унутар угла $\sphericalangle P'O'Q'$ постоји полуправа $O'Q''$ таква да је угао $\sphericalangle P'O'Q''$ подударан углу $\sphericalangle POQ$.

Како је $\sphericalangle POQ$ прав, на основу Теореме 2.20 и угао $\sphericalangle P'O'Q''$ је прав.

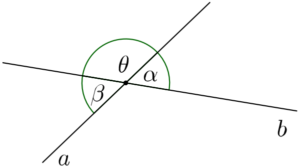
Означимо са $O'R'$ полуправу комплементну полуправој $O'P'$.

С обзиром да су углови $\sphericalangle P'O'Q'$ и $\sphericalangle P'O'Q''$ прави, они су по дефиницији подударни својим напоредним угловима, тј. $\sphericalangle P'O'Q' \cong \sphericalangle Q'O'R'$ и $P'O'Q'' \cong \sphericalangle Q''O'R'$.

Тада су две полуправе $O'Q'$ и $O'Q''$ симетрале опруженог угла $\sphericalangle P'O'R'$ што је немогуће, јер сваки угао има јединствену симетралу.

Ако претпоставимо да је $\sphericalangle P'O'Q' < \sphericalangle POQ$, такође се добија контрадикција. Отуда следи да су углови $\sphericalangle POQ$ и $\sphericalangle P'O'Q'$ подударни. $\square$

Дефиниција 13. Унакрсни углови су углови које образују две праве које се секу, а који нису напоредни.



Слика 42. Унакрсни углови α и β

Теорема 2.22. Унакрсни углови су међусобно подударни.

Доказ. Нека су α и β унакрсни углови настали у пресеку правих a и b. Означимо са θ угао напоредан угловима α и β (слика 42).

Тада имамо да је $\theta \cong \theta$, угао α је напоредан углу θ и угао β је напоредан углу θ.

На основу Теореме 2.19 важи да су напоредни углови подударних углова подударни, па на основу те теореме следи да је $\alpha \cong \beta$. $\square$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дати су напоредни углови α и β. Доказати да су симетрале тих углова нормалне праве.

2. Нека су A, B тачке на правој p и C, D тачке на правој q, тако да је $\mathcal{B}(A, O, B)$ и $\mathcal{B}(C, O, D)$. Ако је $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB + \sphericalangle BOD = 274^\circ$, израчунати углове $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$.

3. Углови θ и ω су комплементни. Ако су θ_1 и ω_1 углови суплементни угловима θ и ω редом, израчунати $\theta_1 + \omega_1$.

4. Доказати да је угао који образују бисектриса угла $\sphericalangle ACB$ и произвољна полуправа CM са теменом C изван тог угла, једнак полузбиру углова $\sphericalangle MCA$ и $\sphericalangle MCB$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

5. Дати су углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A_1OB_1$ са нормалним крацима $OA \perp OA_1$ и $OB \perp OB_1$, тако да су тачке A_1 и B_1 са различитих страна праве OA. Доказати да су конвексни углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A_1OB_1$ суплементни и да имају исту симетралу.

6. Из тачке O на правој AA_1 повучене су полуправе OB и OX са исте стране праве AA_1 тако да $OX \in \sphericalangle AOB$. Ако је $\sphericalangle XOA = \alpha$ и $\sphericalangle XOB = \beta$, израчунати углове AOB и $\sphericalangle XOM$, где је OM бисектриса угла $\sphericalangle AOB$.