# УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

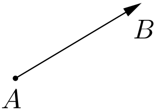
Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

# 15. Хомотетија

Хомотетија је геометријска трансформација која се уводи помоћу вектора. Представник вектора је усмерена дуж.

Усмерена дуж $AB$ се означава са $\overrightarrow{AB}$. На слици 190, $A$ је почетна тачка, а $B$ последња тачка усмерене дужи. У литератури се усмерена дуж често назива вектор.



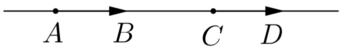

Слика 190. Усмерена дуж

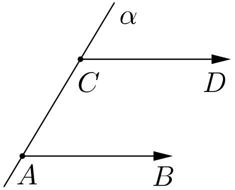
Свака усмерена дуж има дужину, правац и смер.

# 15. Хомотетија

Усмерене дужи имају исти правац, ако се налазе на истој правој, или на паралелним правама.

Усмерене дужи које имају исти правац имају исти смер, ако су позитивно оријентисане ( тј. с лева на десно), или негативно оријентисане (тј. с десна на лево). Усмерене дужи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на слици имају исту дужину, правац и смер.



На скупу усмерених дужи можемо да дефинишемо релацију ,,једнакости".

**Дефиниција 8.4.** Усмерене дужи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су једнаке, ако имају исту дужину, правац и смер.

Релација ,,једнакости" усмерених дужи је релација еквиваленције. Она скуп усмерених дужи дели на класе еквиваленције. То су подскупови у којима се налазе међусобно једнаке усмерене дужи.

**Пример**. Странице паралелограма одређују усмерене дужи. Колико класа еквиваленције има у том скупу усмерених дужи?

**Дефиниција 8.5.** Вектор је скуп усмерених дужи које су међусобно једнаке.

Дакле, вектор је класа еквиваленције релације ,,једнакости" усмерених дужи.

# 15. Хомотетија

**Дефиниција 8.6.** Хомотетија $\mathcal{H}_{O,k} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ са центром $O$ и коефицијентом $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ је бијективна трансформација којом се произвољна тачка $X$ пресликава у тачку $X'$ тако да важи

$$\overrightarrow{OX'} = k\,\overrightarrow{OX}.$$

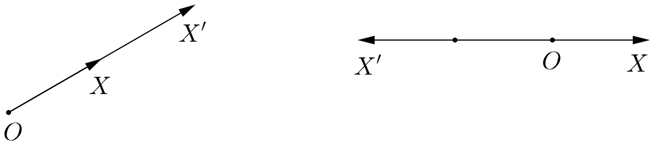
Ако је коефицијент хомотетије $k = 1$, тада је $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OX}$. Одавде је $X = X'$, па је у том случају хомотетија коинциденција (идентична трансформација).

Ако је коефицијент хомотетије $k = -1$, тада је $\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}$. Тада је хомотетија симетрија у односу на тачку O, тј. $\mathcal{S}_O$.

# 15. Хомотетија

Ако је коефицијент хомотетије $k > 0$, вектори $\overrightarrow{OX'}$ и $\overrightarrow{OX}$ имају исти смер (слика 194).

Ако је коефицијент хомотетије $k < 0$, вектори $\overrightarrow{OX'}$ и $\overrightarrow{OX}$ имају супротан смер, па представљају супротне векторе (слика 194).



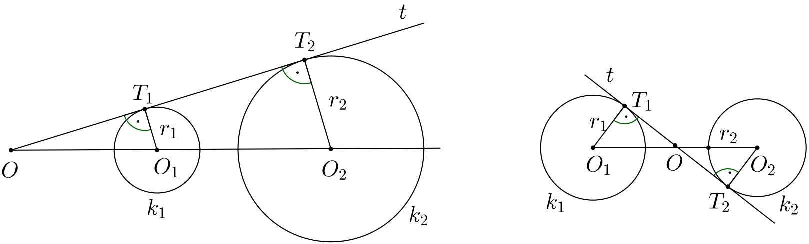

Слика 194

Помоћу хомотетија се дефинишу хомотетичне фигуре.

# 15. Хомотетија

**Дефиниција 8.7.** Фигуре $\Phi$ и $\Psi$ у еуклидској равни су хомотетичне, ако постоји хомотетија таква да је $\mathcal{H}_{O,k}(\Phi) = \Psi$.

На пример, хомотетичне фигуре су кругови $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ који се не секу и имају различите полупречнике. Центар те хомотетије је тачка $O$, а коефицијент $k = \frac{r_2}{r_1}$ или $k = -\frac{r_2}{r_1}$.



**Теорема 8.6.** Ако се хомотетијом $\mathcal{H}_{O,k}$ дуж $AB$ пресликава на дуж $A'B'$, тада важи једнакост

$$\mathfrak{m}(A'B') = |k|\,\mathfrak{m}(AB).$$

Ако је $k \neq \pm 1$, тада дужи $AB$ и $A'B'$ нису једнаке. Зато у општем случају, хомотетија не чува дужину дужи. Међутим, она чува размеру две дужи, о чему говори следећа теорема.

**Теорема 8.7.** Ако се хомотетијом $\mathcal{H}_{O,k}$ дужи $AB$ и $CD$ пресликавају редом на дужи $A'B'$ и $C'D'$, тада је

$$\mathfrak{m}(A'B') : \mathfrak{m}(C'D') = \mathfrak{m}(AB) : \mathfrak{m}(CD).$$

**Доказ**. Ако је $\mathcal{H}_{O,k}(AB) = A'B'$ и $\mathcal{H}_{O,k}(CD) = C'D'$, на основу Теореме 8.6 имамо да је

$$\mathfrak{m}(A'B') = |k|\mathfrak{m}(AB), \quad \mathfrak{m}(C'D') = |k|\mathfrak{m}(CD),$$

па је

$$\mathfrak{m}(A'B') : \mathfrak{m}(C'D') = |k|\mathfrak{m}(AB) : |k|\mathfrak{m}(CD) = \mathfrak{m}(AB) : \mathfrak{m}(CD),$$

што је и требало доказати. $\square$

**Последица 1**. Хомотетијом се средиште дужи пресликава у средиште дужи.

**Доказ**. За вежбу.

# 15. Хомотетија

Следећа теорема даје одговор на питање шта је хомотетична слика праве, угла и круга и има велику примену у задацима.

**Теорема 8.8.** Хомотетијом $\mathcal{H}_{O,k}$, $k \neq \pm 1$, $k \neq 0$, се пресликава:

$(i)$ права у исту праву, ако центар хомотетије припада правој;

$(ii)$ права у њој паралелну праву, ако центар хомотетије не припада правој;

$(iii)$ угао у исти угао или у њему унакрсан угао, ако је центар хомотетије теме угла;

$(iv)$ угао у подударан угао са паралелним крацима, ако центар хомотетије није теме угла;

$(v)$ круг у други круг, ако центар хомотетије није центар круга;

$(vi)$ круг у концентричан круг, ако је центар хомотетије центар круга.

**Пример 8.7.** Конструисати хомотетичну слику правоугаоника $ABCD$, ако је центар хомотетије дата тачка $O$ и ако је коефицијент хомотетије $k = 3$.

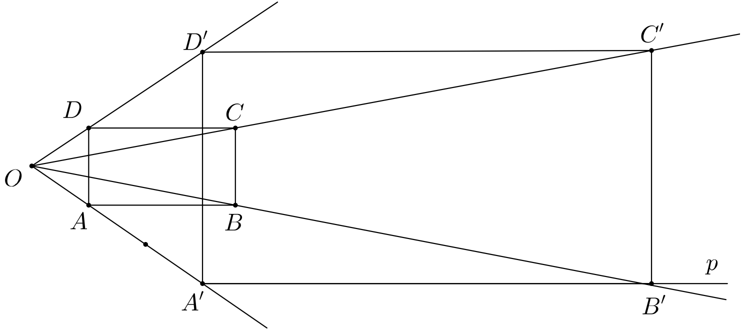
**Решење.** Конструисаћемо хомотетичну слику једног темена правоугаоника, а затим применити Теорему 8.8.

Нека је $\mathcal{H}_{O,k}(A) = A'$. Тада је $\overrightarrow{OA'} = 3\,\overrightarrow{OA}$, па тачку $A'$ конструишемо на полуправој $OA$ тако да је $OA' = 3OA$.

Пошто $O$ не припада страници $AB$, права $AB$ се пресликава у паралелну праву, па кроз тачку $A'$ конструишемо праву $p$ паралелну правој $AB$.

У пресеку праве $p$ и полуправе $OB$ је тачка $B'$, тј. хомотетична слика тачке $B$.

У тачкама $A'$ и $B'$ поставимо нормале на праву $A'B'$. У пресеку нормала и полуправих $OC$ и $OD$ налазе се редом тачке $C'$ и $D'$. Правоугаоник $A'B'C'D'$ је хомотетична слика правоугаоника $ABCD$.




Слика 197. Хомотетична слика правоугаоника

**Теорема 8.10.** Инверзна трансформација $\mathcal{H}_{O,k}^{-1}$ хомотетије $\mathcal{H}_{O,k}$ је хомотетија $\mathcal{H}_{O,k_1}$ са коефицијентом $k_1 = \frac{1}{k}$.

**Теорема 8.11.** Производ две хомотетије $\mathcal{H}_{O,k_1}$ и $\mathcal{H}_{O,k_2}$ са заједничким центром $O$ је хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ са коефицијентом $k = k_1 k_2$.

**Теорема 8.12.** Ако су $\mathcal{H}_{O,k_1}$ и $\mathcal{H}_{O,k_2}$ хомотетије са заједничким центром, тада је $\mathcal{H}_{O,k_2} \circ \mathcal{H}_{O,k_1} = \mathcal{H}_{O,k_1} \circ \mathcal{H}_{O,k_2}$.

Неутрални елемент у односу на производ хомотетија са заједничким центром је коинциденција.

Помоћу Теорема 8.10, 8.11 и 8.12 доказано је следеће тврђење.

**Теорема 8.13.** Скуп свих хомотетија еуклидске равни са заједничким центром представља комутативну групу $(\mathcal{H}_{O,k}, \circ)$ у односу на композицију тих трансформација.

## ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Конструисати хомотетичну слику датог троугла $\triangle ABC$, ако је центар хомотетије тежиште датог троугла, а коефицијент хомотетије $k = -\frac{1}{3}$.

2. У дати троугао $\triangle ABC$ уписати квадрат $KLMN$, чија темена $K$ и $L$ припадају страници $AB$, теме $M$ страници $BC$, а теме $N$ страници $AC$.

3. У дати троугао $\triangle ABC$ уписати паралелограм $AMNP$ чија су темена $M$, $N$ и $P$ редом на страницама $AB$, $BC$ и $AC$ и важи $AM = 2MN$.

4. Дат је троугао $\triangle ABC$ и круг $k(O, r)$. У дати круг уписати троугао $\triangle MNP$ тако да су му странице паралелне страницама датог троугла.

5. У тетивни делтоид уписати правоугаоник чија је једна страница три пута дужа од друге странице.