# УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

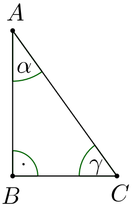
# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

Присетимо се да је у правоуглом троуглу са правим углом у темену $B$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC}, \quad \cos\alpha = \frac{AB}{AC}.$$

У том троуглу, на основу Питагорине теореме важи

$$BC^2 + AB^2 = AC^2.$$



# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

Користећи претходне једнакости, налазимо да је

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AC^2}{AC^2} = 1. \qquad (1)$$

Формула (1) се зове основна тригонометријска идентичност.
Пошто је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{AB}{BC},$$

добијамо да се тангенс и котангенс могу изразити помоћу синуса и косинуса на следећи начин:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

Користећи претходне две једнакости, добијамо

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Помоћу једнакости (1), добијамо да је:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

Како је $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, користећи претходне две једнакости можемо да изразимо синус и косинус преко котангенса:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Осим тригонометријских функција синус, косинус, тангенс и котангенс, понекад се користе и тригонометријске функције секанс и косеканс, у ознаци $\sec$ и $\operatorname{cosec}$, дефинисане на следећи начин:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

За оштре углове $\alpha$ и $\gamma$ у троуглу $\triangle ABC$ са правим углом у темену $B$, важе тригонометријске формуле комплементног угла:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \cos\gamma = \cos(90^\circ - \alpha),$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \sin\gamma = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} = \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AB}{BC} = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

Решити троугао значи израчунати дужине страница и мере углова троугла, ако су дате дужине неких страница, мере неких углова, висине, тежишне дужи, површина троугла и сл.

При решавању троугла, често се користе синусна теорема, косинусна теорема и теорема о пројекцијама.

Поменуте теореме ћемо доказати у случају када је троугао оштроугли.

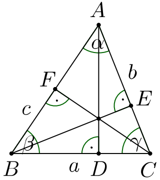
Важно је нагласити да поменуте теореме важе за произвољан троугао (оштроугли, правоугли или тупоугли). У том случају, у доказу теорема се користе одговарајуће адиционе формуле.

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

**Теорема 9.3.** (**Теорема о пројекцијама**) Ако је $\triangle ABC$ троугао са страницама $a$, $b$, $c$ и угловима $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ наспрам тих страница редом, тада је

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \quad b = a\cos\gamma + c\cos\alpha, \quad c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

**Доказ.** Претпоставимо да је $\triangle ABC$ оштроугли троугао. Нека је $AD$ висина из темена $A$.



# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

Из правоуглих троуглова $\triangle BDA$ и $\triangle ADC$, редом налазимо да је

$$\cos\beta = \frac{BD}{c}, \quad \cos\gamma = \frac{CD}{b},$$

па је

$$a = BC = BD + CD = c\cos\beta + b\cos\gamma.$$

Друге две једнакости се слично доказују. $\square$

Помоћу теореме о пројекцијама се може доказати косинусна теорема. На основу те теореме, можемо да израчунамо дужине страница, ако су дате дужине других двеју страница и угао наспрам тражене странице.

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

**Теорема 9.4.** (**Косинусна теорема**) У троуглу $\triangle ABC$ важи:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

**Доказ.** У доказу користимо теорему о пројекцијама. Претпоставимо да је $\triangle ABC$ оштроугли троугао. Множењем релација (из теореме о пројекцијама)

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \quad b = a\cos\gamma + c\cos\alpha, \quad c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

са $a$, $-b$ и $-c$ редом и сабирањем добијених једнакости, добијамо да је

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 - c^2 &= ab\cos\gamma + ac\cos\beta - ab\cos\gamma - bc\cos\alpha \\
&- ac\cos\beta - bc\cos\alpha \\
&= -2bc\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

одакле је

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Друге две једнакости се слично доказују. $\square$

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

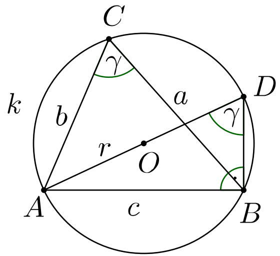
Теорема аналогна косинусној теореми зове се синусна теорема. Помоћу ове теореме се можемо да израчунамо дужине странице троугла, ако је познат угао наспрам странице и полупречник описаног круга, или дужина друге странице, угао наспрам ње и угао наспрам тражене странице.

**Теорема 9.5.** (**Синусна теорема**) Ако је $r$ полупречник описаног круга троугла $\triangle ABC$, тада је

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r. \tag{2}$$

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

**Доказ.** Претпоставимо да је око оштроуглог троугла $\triangle ABC$ описан круг $k(O, r)$. Нека је $AD$ пречник тог круга. Тада је периферијски угао $\sphericalangle ABD$ прав. Периферијски углови $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ADB$ су подударни, јер се налазе над истим кружним луком $\widehat{AB}$.



Помоћу правоуглог троугла $\triangle ABD$ и Дефиниције 9.1 тригонометријских функција, налазимо да је

$$\sin\gamma = \frac{AB}{AD} = \frac{c}{2r}. \tag{3}$$

Аналогно, повлачењем пречника $BE$ и $CF$ добијамо да је

$$\sin\beta = \frac{AC}{AE} = \frac{b}{2r}, \quad \sin\alpha = \frac{BC}{CF} = \frac{a}{2r}. \tag{4}$$

Помоћу релација (3) и (4), добијамо да важи релација (2). $\square$

# 19. Основне тригонометријске формуле и решавање правоуглог троугла

Помоћу тригонометријских формула, можемо да изведемо формуле за површину троугла.

**Теорема 9.6.** Ако је $r$ полупречник описаног круга и $s$ полуобим троугла $\triangle ABC$, тада је његова површина дата формулом:

(а) $P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$,

(б) $P = \frac{abc}{4r}$,

(в) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Формула (в) се зове Херонов образац.

## ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунати вредност израза $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$.

2. Ако је $\alpha$ оштар угао, доказати идентитет

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

3. Висина која одговара хипотенузи дели хипотенузу на одсечке дужине $16\,cm$ и $9\,cm$. Израчунати тригонометријске функције оштрих углова овог троугла.

4. Упростити израз

$$\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2} + \frac{1}{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2+(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2}.$$

# ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

5. Нека су $a$ и $b$ катете, $c$ хипотенуза, $h$ висина која одговара хипотенузи, $p$ и $q$ нормалне пројекције катета $a$ и $b$ редом на хипотенузу $c$ и $P$ површина правоуглог троугла $\triangle ABC$. Решити тај троугао, ако је дато:
(а) $a = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}, \quad \alpha = 30^\circ$;
(б) $a = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}, \quad b = 6\,\mathrm{cm}$;
(в) $b = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}, \quad a : c = \sqrt{2} : 2$;

6. Решити правоугли троугао $\triangle ABC$, ако је $a + b + c = 3 + \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ и угао $\alpha = 30^\circ$.

7. Решити правоугли троугао $\triangle ABC$, ако је $a + h = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ и угао $\alpha = 60^\circ$, где је $h$ висина која одговара хипотенузи.

8. Дијагонале правоугаоника $ABCD$ површине $P$ секу се под оштрим углом $\varphi$. Израчунати странице правогаоника.