УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

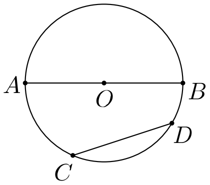
школска 2022/23

11. Централни и периферијски угао круга

Да бисмо дефинисали централни и периферијски угао круга, најпре наводимо дефиницију тетиве и кружног лука, који су помоћни појмови.

Дефиниција 6.1. Тетива је дуж чије се крајње тачке налазе на кругу.

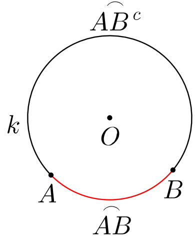
Најдужа тетива круга је његов пречник (дијаметар) (слика 137).



Слика 137. Тетива

11. Централни и периферијски угао круга

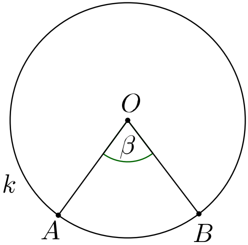
Дефиниција 6.2. Кружни лук је део круга ограничен двема тачкама.



Слика 138. Кружни лук

Две тачке на кругу одређују два кружна лука који су комплементарни, тј. њихова унија је читав круг (слика 138).

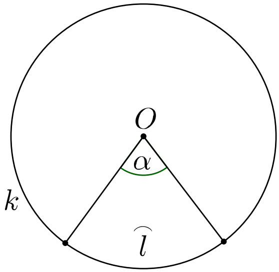
Дефиниција 6.3. Централни угао круга је угао чије је теме центар круга и чији краци садрже два полупречника.



Слика 139. Централни угао круга

14. Централни и периферијски угао круга

Централни угао α се налази над кружним луком $\overset{\frown}{l}$, ако његови краци садрже крајње тачке тог лука и ако тај лук припада том углу (слика 141).



Слика 141

11. Централни и периферијски угао круга

Ако се централни угао α налази над кружним луком $\overset{\frown}{l}$, тада се дужина кружног лука $\overset{\frown}{l}$ израчунава по формули

$$l = \frac{r\pi\alpha^\circ}{180^\circ},$$

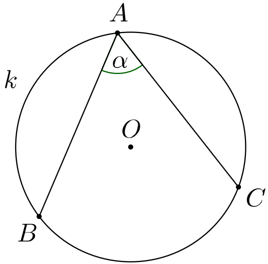
где је r полупречник круга и α° мера централног угла α у степенима. Такође се користи и формула

$$l = r\theta,$$

где је r полупречник круга и θ мера централног угла α у радијанима.

Периферијски угао круга се дефинише на следећи начин.

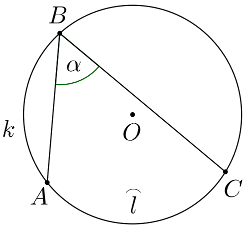
Дефиниција 6.4. Периферијски угао круга је угао чије се теме налази на кругу и чији краци садрже две тетиве круга.



Слика 143. Периферијски угао круга

11. Централни и периферијски угао круга

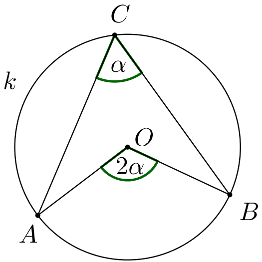
Периферијски угао се налази над кружним луком $\overset{\frown}{l}$, ако његови краци садрже крајње тачке тог лука и ако тај лук припада том углу.



Следећа теорема даје везу између централног и периферијског угла над истим кружним луком.

11. Централни и периферијски угао круга

Теорема 6.1. Централни угао круга је два пута већи од периферијског угла над истим кружним луком.



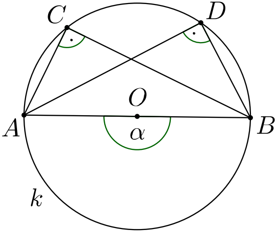
Централни и периферијски угао над истим луком

Следећа теорема је директна последица Теореме 6.1.

11. Централни и периферијски угао круга

Теорема 6.2. Периферијски угао над пречником круга је прав.

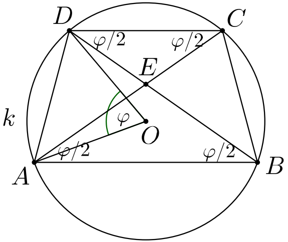
Доказ. Централни угао $\sphericalangle AOB = 180^\circ$ над луком $\overset{\frown}{AB}$ је на основу теореме 6.1 два пута већи од периферијског угла $\sphericalangle ACB$ над истим луком $\overset{\frown}{AB}$, одакле следи да је угао $\sphericalangle ACB$ прав. $\square$



11. Централни и периферијски угао круга

Пример 1. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$. Ако је O центар круга описаног око трапеза и E пресек његових дијагонала, доказати да је $\sphericalangle AOD \cong \sphericalangle AED$.

Доказ. Нека је $k(O, r)$ круг описан око једнакокраког трапеза $ABCD$. Означимо централни угао $\sphericalangle AOD$ са φ.



11. Централни и периферијски угао круга

Тада су $\sphericalangle AOD$ и $\sphericalangle ACD$ централни и периферијски угао редом над истим кружним луком $\overset{\frown}{AD}$, па је на основу претходне теореме $\sphericalangle ACD = \frac{\varphi}{2}$.

Такође су $\sphericalangle AOD$ и $\sphericalangle ABD$ централни и периферијски угао редом над истим кружним луком $\overset{\frown}{AD}$, одакле је $\sphericalangle ABD = \frac{\varphi}{2}$.

Углови $\sphericalangle ACD$ и $\sphericalangle CAB$ су подударни као наизменични углови на трансверзали AC.

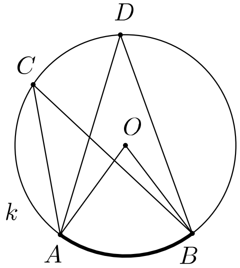
Такође су и углови $\sphericalangle ABD$ и $\sphericalangle BDC$ подударни као наизменични углови на трансверзали BD.

Како је $\sphericalangle AED$ спољашњи угао троугла $\triangle DEC$, он је једнак збиру два унутрашња њему несуседна угла, па је $AED = \sphericalangle EDC + \sphericalangle ECD = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi = \sphericalangle AOD$, што је и требало доказати. $\square$

Следеће две теореме су такође последице Теореме 6.1.

Теорема 6.3. Периферијски углови над истим кружним луком су подударни.

Доказ. Нека су $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ADB$ два произвољна периферијска угла над истим кружним луком $\widehat{AB}$.



На основу Теореме 6.1 имамо да је $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$, па је $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. $\square$

Теорема 6.4. Периферијски углови над истим тетивом су:

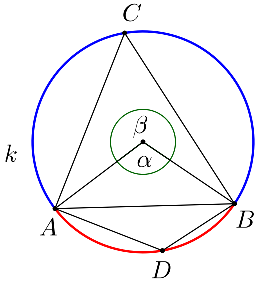
(а) подударни, ако се њихова темена налазе са исте стране праве која садржи тетиву;

(б) суплементни, ако се њихова темена налазе са разних страна праве која садржи тетиву.

Доказ. Тврђење (а) важи на основу претходне теореме 6.3. Да бисмо доказали тврђење (б), претпоставимо да се темена периферијских углова $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ADB$ налазе са разних страна праве AB која садржи тетиву AB.

Означимо централни угао над кружним луком $\overset{\frown}{ADB}$ са α, а централни угао над кружним луком $\overset{\frown}{ACB}$ са β.

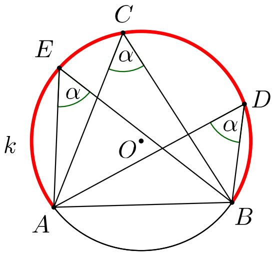
Применом Теореме 6.1 имамо да је $\alpha = 2\sphericalangle ACB$ и $\beta = 2\sphericalangle ADB$. Како је $\alpha + \beta = 360^\circ$, добијамо да је $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}360^\circ = 180^\circ$. $\square$



11. Централни и периферијски угао круга

Геометријско место тачака из којих се тетива AB види под углом α, је кружни лук.

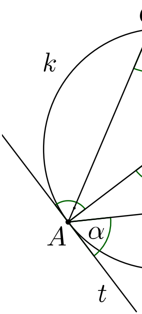
Периферијски углови над истом тетивом су подударни, ако се њихова темена налазе са исте стране праве која садржи тетиву (теорема 6.4), па њихова темена чине то геометријско место тачака.



11. Централни и периферијски угао круга

Теорема 6.5. Угао између тангенте и тетиве која садржи додирну тачку, подударан је периферијском углу над тетивом чије теме не припада том углу.

Доказ. Претпоставимо да тангента t додирује круг $k(O, r)$ у тачки A и уочимо тетиву AB.



Означимо оштар угао између тангенте и тетиве са α. Како је полупречник OA нормалан на тангенту t у тачки A, следи да је $\sphericalangle OAB = 90^\circ - \alpha$.

Пошто је троугао $\triangle OAB$ једнакокраки, добијамо да је централни угао

$$\sphericalangle AOB = 180^\circ - 2\sphericalangle OAB = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

Нека је $\sphericalangle ACB$ произвољан периферијски угао над тетивом AB чије теме није унутар угла α.

Како се углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle ACB$ налазе над истим луком $\overset{\frown}{AB}$, на основу Теореме 6.1 следи да је $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2}2\alpha = \alpha$. $\square$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Странице AB и AC троугла $\triangle ABC$ су пречници кружница k_1 и k_2 које се секу у тачкама A и M. Доказати да тачка M припада правој BC.

2. Доказати да симетрала угла код темена A троугла $\triangle ABC$ сече описани круг тог троугла у тачки која припада симетрали странице BC.

3. Дата је полукружница пречника AB и на њој тачке D и E. Праве AD и BE секу се у тачки F, а тетиве AE и BD у тачки G. Доказати да је права FG нормална на праву AB.

4. Дат је квадрат $ABCD$. Тачка E је средиште странице BC, а нормала у тачки E на праву AE сече страницу квадрата CD у тачки F. Доказати да је $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAE$.