УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

13. Размера дужи и Талесова теорема

Да бисмо дефинисали размеру дужи, најпре ћемо дефинисати меру дужи. То је функција која свакој дужи придружује позитиван реалан број који представља њену меру у одговарајућем систему мерења.

Дефиниција 8.1. Нека је $\mathcal{D}$ скуп свих дужи и $\mathbb{R}^+$ скуп позитивних реалних бројева. Функција $\mathfrak{m} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ се назива мера (дужина) дужи, ако су испуњени услови:

(1) постоји дуж A_0B_0, таква да је $\mathfrak{m}(A_0B_0) = 1$;

(2) за сваке две дужи AB и CD, ако је $AB \cong CD$ тада је $\mathfrak{m}(AB) = \mathfrak{m}(CD)$;

(3) за сваке три дужи AB, CD и EF, ако је $AB + CD \cong EF$ тада је

$$\mathfrak{m}(AB) + \mathfrak{m}(CD) = \mathfrak{m}(EF).$$

13. Размера дужи и Талесова теорема

Број $\mathfrak{m}(AB)$ се зове мера дужи AB. Уређена тројка $(\mathcal{D}, \mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$ се назива систем мерења.

Ако је мера дужи једнака јединици, таква дуж се назива јединична дуж.

Дефиниција 8.2. Размера дужи AB и CD је количник њихових мера $\mathfrak{m}(AB) : \mathfrak{m}(CD)$.

Понекад се размера дужи a и b, уместо $m(a) : m(b)$ означава са $a : b$.

Ако је размера дужи рационалан број, дужи су самерљиве, а ако је та размера ирационалан број, дужи су несамерљиве.

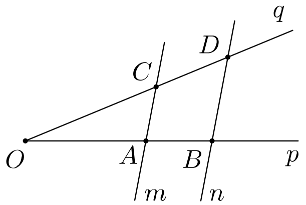
Дефиниција 8.3. Пар дужи a, b је пропорционалан (сразмеран) пару дужи c, d ако је $a : b = c : d$.

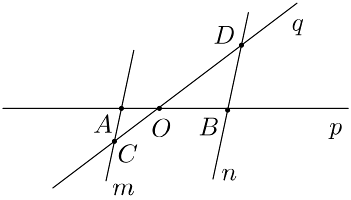
13. Размера дужи и Талесова теорема

Пропорционалне дужи се користе у директној и обрнутој Талесовој теореми.

Директна Талесова теорема: Ако се праве p и q секу у тачки O и ако паралелне праве m и n секу праву p у тачкама A и B редом и праву q у тачкама C и D редом, тада је

$$OA : OB = OC : OD = AC : BD.$$





13. Размера дужи и Талесова теорема

Директна Талесова теорема тврди да две паралелне праве m и n одсецају пропорционалне дужи на правама p и q.

Напоменимо да се директна Талесова теорема може доказати користећи векторе, површину троугла, или сличне троуглове.

На пример, ако доказујемо директну Талесову теорему помоћу сличних троуглова, можемо уочити да су троуглови $\triangle OAC$ и $\triangle OBD$ слични, јер имају подударне углове.

Отуда су странице наспрам подударних углова пропорционалне, па је

$$OA : OB = OC : OD = AC : BD,$$

чиме је доказана директна Талесова теорема.

13. Размера дужи и Талесова теорема

Обрнута Талесова теорема: Ако се праве p и q секу у тачки O и ако две произвољне праве m и n секу праву p у тачкама A и B редом и праву q у тачкама C и D редом тако да je

$$OA : OB = OC : OD,$$

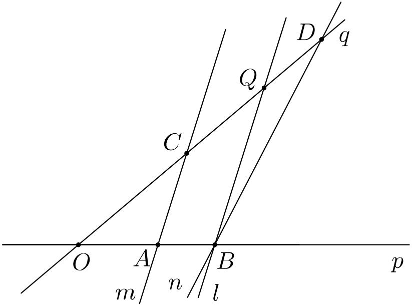
тада je $m \,||\, n$.

Доказ. Претпоставимо да се праве p и q секу у тачки O. Нека произвољне праве m и n секу праву p у тачкама A и B редом и праву q у тачкама C и D редом тако да важи

$$OA : OB = OC : OD.$$

Претпоставимо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(O, A, B)$, што значи да je тачка A између тачака O и B.

13. Размера дужи и Талесова теорема



Слика 172. Обрнута Талесова теорема

На основу аксиоме паралелности, постоји јединствена права l која садржи тачку B и паралелна је правој m.

13. Размера дужи и Талесова теорема

Ако би права l била паралелна правој q, на основу релација $m||l$ и $l||q$ би следило $m \,||\, q$, што није могуће, јер се праве m и q секу у тачки C. Према томе, права l сече праву q у некој тачки Q.

Пошто важи распоред тачака $\mathcal{B}(O, A, B)$ и $m \,||\, l$, важиће и распоред тачака $\mathcal{B}(O, C, Q)$ на правој q.

Како је $m \,||\, l$, на основу директне Талесове теореме следи да је

$$OA : OB = OC : OQ.$$

По претпоставци је

$$OA : OB = OC : OD.$$

Последње две једнакости дају $OQ \cong OD$.

13. Размера дужи и Талесова теорема

Како су тачке Q и D са исте стране тачке O и важи $OQ \cong OD$, оне се поклапају, па се и праве n и l поклапају.

Пошто је $m \,||\, l$, а праве l и n се поклапају, закључујемо да је $m \,||\, n$ што је и требало доказати. $\square$

Важна последица Талесове теореме је теорема о основној пропорционалности.

Она је била изложена у шестој књизи Еуклидових ,,Елемената" и сматра се да је она оригинални облик Талесове теореме.

На основу теореме о основној пропорционалности, ако је права паралелна једној страници троугла, тада она одсеца пропорционалне дужи на другим двема страницама. И обрнуто, ако права одсеца пропорционалне дужи на двема страницама троугла, тада је она паралелна трећој страници.

13. Размера дужи и Талесова теорема

Теорема о основној пропорционалности: Ако је права p паралелна страници AB троугла $\triangle ABC$ и сече странице AC и BC редом у тачкама M и N, тада је

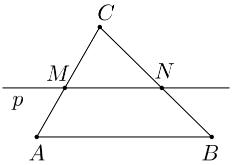
$$CM : MA = CN : NB.$$

Обрнуто, ако права p сече странице AC и BC троугла $\triangle ABC$ редом у тачкама M и N тако да је

$$CM : MA = CN : NB,$$

тада је права p паралелна страници AB.

Доказ. Претпоставимо најпре да је права p паралелна страници AB троугла $\triangle ABC$ и да сече странице AC и BC редом у тачкама M и N.



Слика 173. Теорема о основној пропорционалности

13. Размера дужи и Талесова теорема

На основу директне Талесове теореме имамо да је

$$CM : CA = CN : CB.$$

Користећи особину пропорције добијамо да је

$$CA : CM = CB : CN.$$

Како је $CA = CM + MA$ и $CB = CN + NB$, заменом у претходној пропорцији налазимо да је

$$\frac{CM + MA}{CM} = \frac{CN + NB}{CN},$$

па је

$$1 + \frac{MA}{CM} = 1 + \frac{NB}{CN}.$$

13. Размера дужи и Талесова теорема

Из претходне једнакости следи да је

$$CM : MA = CN : NB,$$

што је и требало доказати.

Обрнуто, претпоставимо да права p сече странице AC и BC троугла $\triangle ABC$ редом у тачкама M и N тако да важи пропорција

$$CM : MA = CN : NB.$$

Користећи особину пропорције, добијамо да је

$$\frac{CM}{CN} = \frac{MA}{NB}.$$

13. Размера дужи и Талесова теорема

Користећи особину пропорције

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d},$$

и претходну једнакост, следи да је

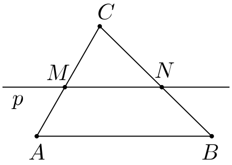
$$\frac{CM}{CN} = \frac{MA}{NB} = \frac{CM+MA}{CN+NB} = \frac{CA}{CB}.$$

Дакле,

$$\frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB},$$

па је

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB}.$$



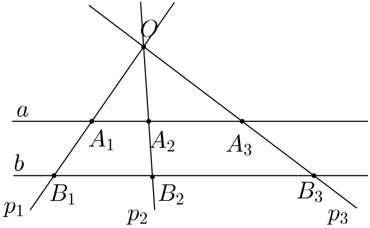
Слика 173. Теорема о основној пропорционалности

Применом обрнуте Талесове теореме закључујемо да је $p \,||\, AB$, што је и требало доказати $\square$

Следећа теорема је последица директне Талесове теореме.

Теорема 8.5. Нека се праве p_1, p_2 и p_3 секу у тачки O. Ако паралелне праве a и b секу праву p_1 у тачкама A_1 и B_1 редом, праву p_2 у тачкама A_2 и B_2 редом и праву p_3 у тачкама A_3 и B_3 редом, тада је

$$A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3.$$



13. Размера дужи и Талесова теорема

Теорема о основној пропорционалности се користи при подели дужи у датом односу (у датој размери).

Пример 8.1. На дужи AB одредити тачку X која је дели у односу $2:3$.

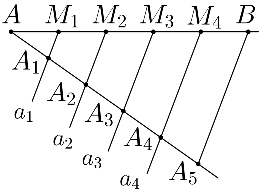
Решење. Да бисмо дуж AB поделили у односу $2:3$, конструишемо произвољну полуправу са теменом у тачки A или B.

Затим на ту полуправу нанесемо 5 произвољних подударних дужи $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \cdots \cong A_4A_5$.

Спојимо последњу тачку A_5 са тачком B и повучемо праве $a_1, \ldots, a_4$ паралелне дужи BA_5 које редом пролазе кроз тачке $A_1, \ldots, A_4$.

Означимо пресечне тачке правих $a_1, \ldots, a_4$ и дужи AB са $M_1, \ldots, M_4$ (слика 176).

13. Размера дужи и Талесова теорема



Слика 176. Подела дужи у датом односу

Пошто су праве $a_1, \ldots, a_4$ паралелне, на основу Теореме о основној пропорционалности је $AA_2 : A_2A_5 = AM_2 : M_2B$. Како је по конструкцији $AA_2 : A_2A_5 = 2 : 3$, следи да је $AM_2 : M_2B = 2 : 3$, што значи да је тачка $M_2 = X$ тражена тачка.

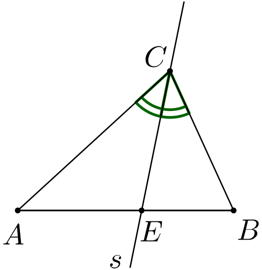
13. Размера дужи и Талесова теорема

Следећа теорема има велику практичну примену у задацима.

Теорема 8.6. Права s је симетрала угла код темена C троугла ABC ако и само ако је

$$AC : BC = AE : BE,$$

где је E пресечна тачка симетрале и странице AB.



ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дату дуж CD поделити у односу $3 : 4$.

2. Доказати да пресечна тачка дијагонала трапеза дели обе дијагонале на одсечке који су пропорционални основицама трапеза.

3. Дат је оштар угао $\sphericalangle xOy$. Ако су A, B и C тачке на краку Ox такве да је $\mathcal{B}(O, A, B, C)$, D и E тачке на краку Oy такве да је $\mathcal{B}(O, D, E)$, при чему је $AD||BE$ и $BD\,||\,CE$, доказати да је $OB^2 = OA \cdot OC$.

4. Дате су дужи a, b, c и јединична дуж e. Конструисати дуж x такву да је:
(а) $a : b = c : x$; (б) $x : b = a : c$; (в) $xe = ab$; (г) $xe = a^2$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

5. Доказати да тежишна дуж троугла $\triangle ABC$ која одговара страници AB полови сваку дуж која је паралелна страници AB и чије се крајње тачке налазе на страницама BC и AC.

6. Дат је троугао $\triangle ABC$ и средиште D странице BC. Ако симетрале углова $\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle ADC$ секу странице AB и AC редом у тачкама M и N, доказати да је $MN||BC$.

7. На страници AD паралелограма $ABCD$ дата је тачка N таква да је $5AN = AD$. Дуж BN и дијагонала AC секу се у тачки M. Доказати да је $6AM = AC$.