УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

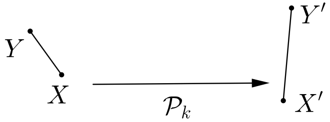
школска 2022/23

16. Трансформација сличности

Трасформација сличности је поред изометрије и хомотетије, једна од основних геометријских трансформација. Она се уводи на следећи начин.

$\boxed{\textbf{Дефиниција 8.9.}}$ Трансформација сличности $\mathcal{P}_k : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ са коефицијентом сличности $k \in \mathbb{R}^+$, је бијективна трансформација којом се произвољне тачке X и Y пресликавају у тачке X' и Y' редом тако да је

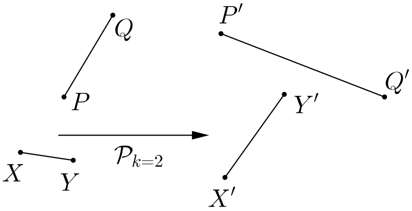
$$\mathfrak{m}(X'Y') = k\,\mathfrak{m}(XY).$$



16. Трансформација сличности

Ако је $k = 1$, трансформација сличности је изометрија, јер је тада $\mathfrak{m}(X'Y') = \mathfrak{m}(XY)$. Према томе, изометрија је трансформација сличности са коефицијентом сличности $k = 1$. Ако је $k \neq 1$, трансформација сличности не чува дужину дужи.

Уочимо дужи XY и PQ које се трансформацијом сличности $\mathcal{P}_k$, $k \neq 1$ пресликавају у дужи $X'Y'$ и $P'Q'$ редом.



16. Трансформација сличности

Тада је на основу Дефиниције 8.9,

$$\mathfrak{m}(X'Y') = k\,\mathfrak{m}(XY), \quad \mathfrak{m}(P'Q') = k\,\mathfrak{m}(PQ),$$

па је

$$\mathfrak{m}(X'Y') : \mathfrak{m}(P'Q') = k\,\mathfrak{m}(XY) : k\,\mathfrak{m}(PQ) = \mathfrak{m}(XY) : \mathfrak{m}(PQ).$$

На основу последње једнакости следи да трансформација сличности чува размеру дужи.

Трансформација сличности такође чува колинеарност тачака и распоред тачака на правој.

Следећа теорема даје важну релацију између хомотетија и трансформација сличности.

Теорема 8.16. Свака хомотетија са коефицијентом $k_1 \in R$, $k_1 \neq 0$ је трансформација сличности са коефицијентом сличности $k = |k_1|$.

Доказ. Ако се хомотетијом $\mathcal{H}_{O,k_1}$ тачке A и B пресликавају у тачке A' и B' редом, тада на основу Теореме 8.6 (код Хомотетија) важи једнакост

$$\mathfrak{m}(A'B') = |k_1|\,\mathfrak{m}(AB).$$

Пошто тачке A и B и њихове слике $A' = \mathcal{H}_{O,k_1}(A)$ и $B' = \mathcal{H}_{O,k_1}(B)$ задовољавају претходну једнакост, на основу Дефиниције 8.9 следи да је хомотетија $\mathcal{H}_{O,k_1}$ трансформација сличности $\mathcal{P}_k$ са коефицијентом сличности $k = |k_1|$. $\square$

Теорема 8.17. (i) Производ две трансформације сличности са коефицијентима k_1 и k_2 је трансформација сличности са коефицијентом $k = k_1 k_2$;

(ii) Инверзна трансформација трансформације сличности $\mathcal{P}_k$ је трансформација сличности $\mathcal{P}_{\frac{1}{k}}$;

(iii) Производ трансформације сличности $\mathcal{P}_k$ и њој инверзне трансформације $\mathcal{P}_k^{-1}$ је коинциденција.

Помоћу претходне теореме добијамо следећу теорему.

Теорема 8.18. Скуп свих трансформација сличности представља групу $(\mathcal{P}_k, \circ)$ у односу на производ (композицију) тих трансформација.

16. Трансформација сличности

Постоји важна релација између трансформација сличности, хомотетија и изометрија.

Теорема 8.19. Производ хомотетије и изометрије је трансформација сличности.

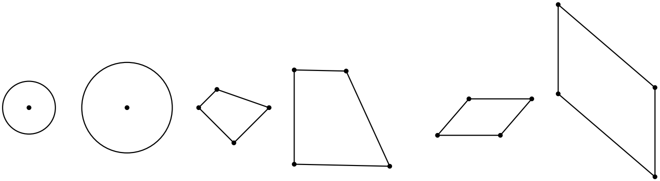
Пошто хомотетија и изометрија пресликавају угао у подударан угао и њихов производ има исту особину.

Теорема 8.20. Трансформација сличности пресликава угао у подударан угао.

Помоћу трансформација сличности се дефинишу сличне фигуре.

Дефиниција 8.10. Фигуре Φ и Ψ су сличне, у ознаци $\Phi \sim \Psi$, ако постоји трансформација сличности $\mathcal{P}_k$ тако да је $\mathcal{P}_k(\Phi) = \Psi$.

Теорема 8.22. Релација сличности фигура је релација еквиваленције.

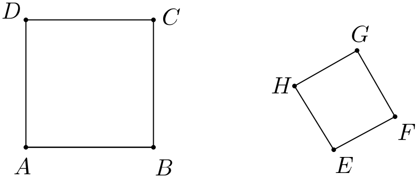


Слика 203. Сличне фигуре

На пример, свака два круга и свака два квадрата су сличне фигуре, јер постоји трансформација сличности која један од њих пресликава на други.

16. Трансформација сличности

За вежбу: Наћи трансформацију сличности која дати квадрат странице a пресликава у други дати квадрат странице b.



Слика 204. Слични квадрати

Слични многоуглови (n-тоуглови, полигони) имају подударне углове и пропорционалне странице које одређују подударне углове.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дата је трансформација сличности $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathfrak{I}$ са коефицијентом $k \in \mathbb{R}^+$. Одредити инверзну трансформацију $\mathcal{P}_k^{-1}$, ако је:
(а) $k = 2$, а изометрија $\mathfrak{I}$ је транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$;
(б) $k = \frac{1}{4}$, а изометрија $\mathfrak{I}$ је осна симетрија $\mathcal{S}_p$;
(в) $k = 3$, а изометрија $\mathfrak{I}$ је ротација $\mathcal{R}_{0,\omega}$.

2. Ако су $\mathcal{P}_{k_1}$ и $\mathcal{P}_{k_2}$ трансформације сличности са коефицијентима сличности $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, одредити трансформацију $(\mathcal{P}_{k_1} \circ \mathcal{P}_{k_2})^{-1}$. Да ли трансформација $(\mathcal{P}_{k_1} \circ \mathcal{P}_{k_2})^{-1}$ може бити изометрија?

3. Конструисати слику $A_1B_1C_1D_1$ датог квадрата $ABCD$ при трансформацији сличности $\mathcal{P}_k = \mathcal{T}_{\overrightarrow{v}} \circ \mathcal{H}_{O,k}$, ако је O пресек дијагонала датог квадрата, $k = 4$ и $\overrightarrow{v}$ дати вектор, а затим доказати да су одговарајуће странице тих квадрата паралелне.