КОНВЕРГЕНЦИЈА НИЗОВА У МЕТРИЧКОМ ПРОСТОРУ

ДЕФИНИЦИЈА 1. *Низ реалних бројева $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је конвергентан ако постоји реалан број $x_0 \in \mathbb{R}$ са особином да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да за свако $n \geqslant n_0$ важи $|x_n - x_0| < \varepsilon$, тј.*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon). \tag{1}$$

Реалан број x_0 се назива лимес или гранична вредност низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Како је у питању метрички простор $(\mathbb{R}, d)$ важи да је $d(x_n, x_0) = |x_n - x_0|$, можемо записати (1) у облику

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon),$$

тј.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in K(x_0, \varepsilon)).$$

ДЕФИНИЦИЈА 2. *Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у метричком простору (X, d). За низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да конвергира ка $x_0 \in X$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ да за све $n \geqslant n_0$ важи $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, тј. ако*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon),$$

тј.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in K(x_0, \varepsilon)).$$

Тачка $x_0 \in \mathbb{N}$ назива се гранична вредност низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишемо $x_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Приметимо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричком простору (X, d) конвергира ка $x_0 \in X$ ако и само ако низ реалних бројева $(d(x_n, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка нули у метричком простору $(\mathbb{R}, d)$.

ТЕОРЕМА 1. *Ако низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричком простору (X, d) конвергира, онда му је гранична вредност јединствено одређена.*

ДОКАЗ. Претпоставимо да важи $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ и $a \neq b$. Приметимо да је $d(a, b) > 0$. Нека је $\varepsilon = \dfrac{d(a, b)}{3}$. Из дефиниције 1. следи

$$(\exists n_0^a \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0^a \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon), \quad (\exists n_0^b \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0^b \Rightarrow d(x_n, b) < \varepsilon).$$

Нека је $n_0 = \max\{n_0^a, n_0^b\}$. За свако $n \geqslant n_0$ важи

$$d(a, b) \leqslant d(a, x_n) + d(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2d(a, b)}{3} < d(a, b),$$

контрадикција! $\square$

ПРИМЕР 1. *Доказати да константан низ конвергира у сваком метричком простору.*

Решење. Нека је (X, d) произвољан метрички простор и $x_n = a$, $n \in \mathbb{N}$, за неко $a \in X$, низ из X. Како је $d(a, a) = 0$, имамо $d(x_n, a) = d(a, a) < \varepsilon$ за свако $\varepsilon > 0$, тј.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 = 1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon),$$

па $x_n \to a$, $n \to +\infty$. $\Diamond$

ТЕОРЕМА 2. *Нека је (X, d) метрички простор. Скуп $F \subseteq X$ је затворен ако и само ако сваки низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из F који конвергира у X има граничну вредност у F.*

ДОКАЗ. $(\Rightarrow)$ Нека је F затворен скуп у метричком простору (X, d), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ из F и $x_n \to x$, $n \to +\infty$. Докажимо да $x_0 \in F$. Претпоставимо супротно, тј. $x_0 \in X \backslash F$. Пошто је F затворен, $X \backslash F$ је отворен, па постоји $\varepsilon > 0$ тако да $K(x_0, \varepsilon) \subseteq X \backslash F$. Како $x_n \to x_0$, $n \to +\infty$, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ да $x_n \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq X \backslash F$ за свако $n \geqslant n_0$, тј. $x_n \in X \backslash F$, $n \geqslant n_0$, што је контрадикција са претпоставком $x_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$.

$(\Leftarrow)$ Нека $F \subseteq X$ садржи граничне вредности свих конвергентних низова из F. Претпоставимо супротно, тј. F није затворен. Тада $X \backslash F$ није отворен, па постоји $x_0 \in X \backslash F$ да за свако $r > 0$ важи $K(x_0, r)$ није цела садржана у $X \backslash F$, тј. $K(x_0, r) \cap F \neq \varnothing$. За $k \in \mathbb{N}$ и $r = \frac{1}{k}$ налазимо тачке $x_k \in F$ такве да $d(x_0, x_k) < \frac{1}{k}$. Низ $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ је из F и $d(x_0, x_k) < \frac{1}{k} \to 0$, $k \to +\infty$, па $x_k \to x_0$, $k \to +\infty$ и $x_0 \in X \backslash F$, што је контрадикција са претпоставком да сваки конвергентан низ из F има лимес у F. □

Приметимо да конвергентни низови дају карактеризацију затворених скупова, па самим тим и отворених који су комплементи затворених скупова.

ДЕФИНИЦИЈА 3. *За низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричком простору (X, d) кажемо да је ограничен ако постоје тачка $x_0 \in X$ и реалан број $M > 0$ такав да $x_n \in K(x_0, M)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Другачије речено, низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је ограничен ако важи*

$$(\exists M > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}) d(x_m, x_n) < M.$$

ТЕОРЕМА 3. *Сваки конвергентан низ у метричком простору (X, d) је ограничен.*

ДОКАЗ. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ из X и $x_n \to x_0$, $n \to +\infty$. Нека је $\varepsilon = 1$. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ да за свако $n \geqslant n_0$ важи $x_n \in K(x_0, 1)$. Означимо са $R' = \max\{d(x_0, x_1), d(x_0, x_2), \ldots, d(x_0, x_{n_0 - 1})\}$ и нека је $R = R' + 1$. Очигледно је $x_n \in K(x_0, R)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен. □

ЛЕМА 1. *Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у метричком простору (X, d). Ако низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка $x_0 \in X$, онда и сваки његов подниз конвергира ка x_0.*

ДОКАЗ. Нека је $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Пошто $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x_0, имамо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon).$$

Код подниза је функција n строго растућа, тј. $n_1 = n(1) \geqslant 1$, $n_2 = n(2) \geqslant 2, \ldots$, па је $d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$, за свако $k \geqslant n_0$. Тиме смо показали да $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x_0. □

ПРИМЕР 2. *Навешћемо неке примере низова у $\mathbb{R}^n$.*

1) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ *и* $y_n = \left((-1)^n, (1 + \frac{1}{n})^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *су низови у* $\mathbb{R}^2$*;*

2) $x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{1}{2^n}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *је низ у* $\mathbb{R}^3$*;*

3) $\left\{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{n+k}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ *и k фиксирано је низ у* $\mathbb{R}^k$. ◊

ТЕОРЕМА 4. 1) *Нека је* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)})$*, низ тачака у метричком простору* $\mathbb{R}_p^k = (\mathbb{R}^k, d_p)$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Конвергенција низа* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *граничној вредности* $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *у* $\mathbb{R}_p^k$ *је еквивалентна конвергенцији низова* $i-$*тих координата тачака* x_n*, тј. низова* $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$*,* $i-$*тој координати тачке* x *у* $\mathbb{R}$ *за све* $i = \overline{1,k}$*.*

2) *У простору* ℓ_p*,* $1 \leqslant p < \infty$*, из конвергенције по координатама не следи конвергенција по метрици.*

ДОКАЗ. 1) Ако низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, у смислу метрике у $\mathbb{R}_p^k$, тада низ $d_p(x_n, x) \to 0$, $n \to +\infty$. Међутим, како за свако $i = \overline{1,n}$ важи $|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqslant d_p(x_n, x)$, то низови $i-$тих координата тачака x_n конвергирају ка $i-$тој координати тачке x.

Обратно, ако за свако $i = \overline{1,n}$ важи $\xi_i^{(n)} \to \xi$, $n \to +\infty$, тада следи да $d(x_n, x) \to 0$, $n \to +\infty$, односно $x_n \to x$, $n \to +\infty$.

2) Уочимо у простору ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, следећи низ тачака:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$

Сви координатни низови конвергирају ка 0. Означимо са $\mathbf{0} \in \ell_p$ тачку $(0, 0, 0, \ldots)$. Очигледно је $d(e_n, \mathbf{0}) = 1$, па низ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не конвергира ка $\mathbf{0}$. □

ПРИМЕР 3. *Низ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *чији је општи члан* $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ *конвергира ка* $(0,0)$ *у* $\mathbb{R}^2$*, док низ* $((-1)^n, (1+\frac{1}{n})^n)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, не конвергирау* $\mathbb{R}^2$ *јер низ* $(-1)^n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, не конвергира у* $\mathbb{R}$*.* ◊

НАПОМЕНА. У $\mathbb{R}^n$ важе све алгебарске комбинације низова које важе у $\mathbb{R}$.

ДЕФИНИЦИЈА 4. *Нека је* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ у метричком простору* (X, d)*. За тачку* $x_0 \in X$ *кажемо да је тачка нагомилавања низа* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ако свака кугла са центром у тачки* x_0 *садржи бесконачно много чланова низа* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

ПРИМЕР 4. *Навешћемо неке примере у метричком простору* $\mathbb{R}^2$*.*

1) *Низ* $x_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, има две тачке нагомилавања,* $(-1, 0)$ *и* $(1, 0)$*.*

2) *Низ* $x_n = \left(\frac{1}{n}, n\right)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, нема тачака нагомилавања.* ◊

ДЕФИНИЦИЈА 5. *За низ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *у метричком простору* (X, d) *кажемо да је Кошијев ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *са својством да је* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ *за све* $m, n \geqslant n_0$*, тј.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Приметимо да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев ако $d(x_m, x_n) \to 0$, када $m, n \to +\infty$.

ПРИМЕР 5. *Нека је* $X = (0,1)$ *и* d *еуклидска метрика на* $(0,1)$ *и* $x_n = \frac{1}{n+1}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, низ у* X*. Нека су* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $m > n$*. Тада*

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Нека је $\varepsilon > 0$*. Одаберимо* $n_0 \in \mathbb{N}$ *да је* $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$*. Тада је за све* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $m, n \geqslant n_0$*, важи* $|x_m - x_n| < \varepsilon$*, па је* $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *Кошијев низ. Како је* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$*, овај низ не конвергира у* X*.* ◊

ТЕОРЕМА 5. *У метричком простору (X, d) важе следећа тврђења.*

1) *Сваки конвергентан низ је Кошијев.*

2) *Сваки Кошијев низ је ограничен.*

3) *Ако неки подниз Кошијевог низа конвергира ка x_0, онда и цели низ конвергира ка x_0.*

ДОКАЗ. 1) Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан низ и нека $x_n \to x_0$, $n \to +\infty$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада
$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Нека су $m, n \in \mathbb{N}$такви да је $m, n \geqslant n_0$. Тада
$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_0) + d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
одакле закључујемо да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев.

2) Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ и нека је $\varepsilon = 1$. За $m = n_0$ имамо $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ за свако $n \geqslant n_0$. Дакле, сви чланови низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сем њих коначно много налазе се у кугли $K(x_{n_0}, 1)$. Нека је $R = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \ldots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ је $x_n \in K(x_0, R+1)$, тј. низ је ограничен.

3) Нека је $\varepsilon > 0$. Постоји $n_0^1 \in \mathbb{N}$ да за свако $n_k \geqslant k \geqslant n_0^1$ је $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ и постоји $n_0^2 \in \mathbb{N}$ да је $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ за све $m, n \geqslant n_0^2$. Нека је $n_0 := \max\{n_0^1, n_0^2\}$. За свако $n \geqslant n_0$ важи
$$d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
тј. низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x_0. □

НАПОМЕНА. Приметимо да код Кошијевог низа конвергенција подниза повлачи конвергенцију низа, док у општем случају то није тачно, нпр. $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$.

ПРИМЕР 6. *Нека је дат метрички простор $(\mathbb{Q}, d)$ и $x_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, низ такав да x_n представља децимални запис броја $\sqrt{2}$ са тачних n децимала. Овај низ не конвергира у $(\mathbb{Q}, d)$, међутим за $m, n \in \mathbb{N}$ и $n < m$ је $d(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{10^n} \to 0$, $m, n \to +\infty$, тј. низ је Кошијев.* ♢

ЗАДАТАК. Испитати да ли је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дат са $x_n(t) = \max\{\frac{t}{n}, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, Кошијев у $(C[0,1], d)$ где је $d(f, g) = \int\limits_0^1 |f(t) - g(t)|\, \mathrm{d}t$.

РЕШЕЊЕ. За $t \in [0,1]$ је $x_1(t) = \max\{t, 1\} = 1$, $x_2(t) = \max\{\frac{t}{2}, 1\} = 1$, …, $x_n(t) = \max\{\frac{t}{n}, 1\} = 1$, па је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ константан низ функција у $C[0,1]$, одакле следи да је конвергентан па је и Кошијев. △

ДЕФИНИЦИЈА 6. *Метрички простор (X, d) је комплетан ако је сваки Кошијев низ у X конвергентан.*

ТЕОРЕМА 6. *Потребан и довољан услов да метрички простор (X, d) буде комплетан је да је пресек сваког опадајућег низа непразних затворених скупова у X, чији низ дијаметара тежи нули, једночлан скуп.*

ДОКАЗ.(За већу оцену.) Претпоставимо најпре да је метрички простор (X, d) комплетан. Нека је (F_n) опадајући низ непразних затворених скупова у (X, d), чији низ дијаметара тежи нули. За свако $\varepsilon > 0$ постоји $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такво да је $\operatorname{diam}(F_{n(\varepsilon)}) < \varepsilon$. На основу аксиоме избора, из сваког F_n издвојимо по један елемент f_n. Низ (f_n) је Кошијев, јер за свако $\varepsilon > 0$, за $n \geqslant n(\varepsilon)$, важи $f_n \in F_n \subseteq F_{n(\varepsilon)}$, па је $d(f_m, f_n) \leqslant \operatorname{diam}(F_{n(\varepsilon)}) < \varepsilon$ за $m \geqslant n \geqslant n(\varepsilon)$. Како је по претпоставци простор X комплетан, то сваки Кошијев низ конвергира у њему. Нека $f_n \to f$, $n \to +\infty$. Пошто су сви скупови F_n затворени, то $f \in F_n$ за све $n \in \mathbb{N}$, па тиме и $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ако би постојало $g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, $g \neq f$, тада би било $d(f, g) = r > 0$, па f и g не би могли истовремено припадати скупу F_{n^*}, таквом да је $\operatorname{diam}(F_{n*}) < r$.

Претпоставимо сада да је пресек сваког опадајућег низа непразних затворених скупова у X, чији низ дијаметара тежи нули, једночлан скуп. Нека је (x_n) произвољан Кошијев низ у X. За свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $k(n) \in \mathbb{N}$, такво да је $d(x_{k(n)}, x_k) < 1/n$ за све $k \geqslant k(n)$. Формирајмо опадајући низ непразних затворених скупова F_n на следећи начин. $F_1 = K[x_{k(1)}, 1]$, $F_2 = F_1 \cap K[x_{k(2)}, 1/2], \ldots, F_n = F_{n-1} \cap K[x_{k(n)}, 1/n], \ldots$. Низ $(\operatorname{diam}(F_n))$ тежи нули, па $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ садржи једночлан скуп $\{a\}$. Лако се показује да низ $(x_{k(n)})$ конвергира ка a. Но тада и Кошијев низ (x_n) конвергира ка a јер за $k \geqslant k(n)$ важи

$$d(x_k, a) \leqslant d(x_k, x_{k(n)}) + d(x_{k(n)}, a) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \to 0,\ n \to +\infty.$$

Према томе, простор X је комплетан. □

ПРИМЕР 7. *Примери комплетних метричких простора су* $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$; $(C[a, b], d_\infty)$; (ℓ_p, d_p), $p \in [1, +\infty)$; (c, d); (c_0, d); (m, d); *дискретан метрички простор;* $\mathbb{B}[a, b]$*-скуп свих могућих ограничених функција на интервалу* $[a, b]$ *са метриком* $d(f, g) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$. ◊

ПРИМЕР 8. *Следећи метрички простори нису комплетни.*

1. $(\mathbb{Q}, d)$;
2. $(C[0, 1], d_1)$ *и* $(C[0, 1], d_2)$;
3. $([0, 1), d)$ *где је* d *еуклидска метрика на* $[0, 1)$. *Заиста, низ* $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, *је Кошијев јер за* $m > n$ *је*

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \to 0, \quad m, n \to +\infty,$$

али $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1 \notin [0, 1)$, *па за дати низ закључујемо да је Кошијев али не и конвергентан;*

4. *Скуп* $\mathcal{P}[0, 1]$ *свих могућих полинома на интервалу* $[0, 1]$ *са метриком*

$$d(P_1, P_2) = \max_{t\in[0,1]} |P_1(t) - P_2(t)|$$

није комплетан. ◊

ТЕОРЕМА 7. *Нека је* (X, d) *комплетан метрички простор, а* Y *његов потпростор. Тада,* Y *је комплетан простор ако и само ако је* Y *затворен подскуп од* X.

ДОКАЗ. Нека је Y затворени подскуп од X и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан Кошијев низ у Y. Како је $Y \subseteq X$, то је $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ у X, па он конвергира у X. Како је скуп Y затворен, то је $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \in Y$, па је скуп Y комплетан.

Претпоставимо сада да је Y комплетан простор и $y_0 \in \overline{Y}$. Тада је за свако $n \in \mathbb{N}$ скуп $K(y_0, 1/n) \cap Y$ непразан. Нека тачка y_n припада том скуп. Уочимо сада низ (y_n). За свако $k \in \mathbb{N}$ важи $d(y_{n+k}, y_n) < 2/n$, па је (y_n) Кошијев низ у Y. Тај низ конвергира ка тачки $y_0 \in Y$. Према томе, $Y = \overline{Y}$, па је скуп Y затворен. □

ЗАДАТАК. Ако је познато да је простор m комплетан (видети вежбе), доказати да су простори c и c_0 комплетни.

РЕШЕЊЕ. Како је c потпростор комплетног простора m, довољно је доказати његову затвореност, тј. ако је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = (\xi_\nu^{(n)})_{\nu\in\mathbb{N}}$, конвергентан низ у простору c, а $x = (\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in m$ његова гранична вредност, тада $x \in c$.

Како је простор m комплетан, да би доказали да је низ $x \in m$ конвергентан (тј. да $x \in c$), довољно је доказати да је низ $x = (\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Кошијев. Како $x_n \to x$, $n \to +\infty$, то за свако $\varepsilon > 0$, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, тако да за све $n \geqslant n_0$ важи $d(x_n, x) = \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \left|\xi_\nu^{(n)} - \xi_\nu\right| < \varepsilon$, одакле је $\left|\xi_\nu^{(n)} - \xi_\nu\right| < \varepsilon$ за све $\nu \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$.

Уочимо индекс $n_1 \in \mathbb{N}$, такав да је $\left|\xi_\nu^{(n_1)} - \xi_\nu\right| < \varepsilon/3$, $\nu \in \mathbb{N}$. Како низ $x_{n_1} = (\xi_\nu^{(n_1)})_{\nu\in\mathbb{N}} \in c$, то је он Кошијев, што значи да за довољно велике j, k важи $\left|\xi_j^{(n_1)} - \xi_k^{(n_1)}\right| < \varepsilon/3$. Према томе,

$$|\xi_j - \xi_k| \leqslant \left|\xi_j - \xi_j^{(n_1)}\right| + \left|\xi_j^{(n_1)} - \xi_k^{(n_1)}\right| + \left|\xi_k^{(n_1)} - \xi_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

па је низ $(\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Кошијев, дакле, конвергентан, односно $x \in c$. Према томе, c је затворен потпростор комплетног простора, па је и сам комплетан.

Нормирани простор c_0 је потпростор комплетног нормираног простора c, па је довољно доказати његову затвореност. △

ДЕФИНИЦИЈА 7. *За скуп $A \subseteq X$ кажемо да је густ у скупу $B \subseteq X$ ако је $B \subseteq \overline{A}$. Ако је $\overline{A} = X$ онда кажемо да је A свуда густ у X. Скуп A је свуда густ у B ако се у свакој околини произвољне тачке из B налази бар једна тачка скупа A.*

ПРИМЕР 9. *Скуп $\mathbb{Q}$ је свуда густ у $\mathbb{R}$, тј. између свака два различита реална броја постоји рационалан број.* ◊

ПРИМЕР 10. *У простору $C[a, b]$ скуп функција $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$, ..., $f_n(t) = t^n$, ..., је свуда густ скуп. Ова чињеница је позната из Анализе 2 да се свака непрекидна функција може разложити у Маклоренов ред, тј. $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^n$.* ◊

Чињеница да неки метрички простори нису комплетни није отежавајућа и лако се превазилази.

ТЕОРЕМА 8. (ТЕОРЕМА О КОМПЛЕТИРАЊУ) *За сваки метрички простор (X, d) постоји комплетан метрички простор Y такав да је:*

1. *$X \subseteq Y$,*
2. *X је свуда густ у Y.*

ДОКАЗ. Оставља се студентима за самосталан рад за већу оцену.

Пример 11. $([0,1],d)$ *је комплетирање простора* $([0,1),d)$*;* (R,d) *је комплетирање простора* $(\mathbb{Q},d)$. $\Diamond$

Дефиниција 8. *Нека су* (X,d_X) *и* (Y,d_Y) *метрички простори и* $f : X \to Y$*. За пресликавање* f *кажемо да је изометрија из* X *у* Y *ако је инјективно пресликавање и важи*

$$d_Y(f(x'),f(x'')) = d_X(x',x''), \quad x',x'' \in X.$$

Дефиниција 9. *Нека су* (X,d_X) *и* (Y,d_Y) *метрички простори. Пресликавање* $f : X \to Y$ *је непрекидно у тачки* $x_0 \in X$ *ако важи*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x,x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon),$$

односно ако је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*. Пресликавање* f *је непрекидно на* X *ако је непрекидно у свакој тачки* $x \in X$.

Пример 12. *Доказати да је метрика непрекидна функција својих аргумената.*

Решење. Треба показати да је $\lim\limits_{\substack{x_n \to x\\ y_n \to y}} d(x_n,y_n) = d(x,y)$. Нека је $x_n \to x$ и $y_n \to y$, када $n \to +\infty$. Тада

$$\begin{aligned} |d(x_n,y_n) - d(x,y)| &= |d(x_n,y_n) - d(x_n,y) + d(x_n,y) - d(x,y)| \\ &\leqslant |d(x_n,y_n) - d(x_n,y)| + |d(x_n,y) - d(x,y)| \\ &\leqslant |d(y_n,y)| + |d(x_n,x)| \to 0, \quad n \to +\infty, \end{aligned}$$

јер је $\lim\limits_{\substack{x_n \to x\\ y_n \to y}} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

Приметимо да смо користили $|d(a,b) - d(a,c)| \leqslant d(b,c)$, за све $a,b,c \in X$. Наиме,

$$d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b) \quad \text{и} \quad d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c),$$

па је

$$-d(b,c) \leqslant d(a,b) - d(a,c) \leqslant d(c,b),$$

тј. $|d(a,b) - d(a,c)| \leqslant d(b,c)$. $\Diamond$

БАНАХОВА ТЕОРЕМА О ФИКСНОЈ ТАЧКИ

Често постоји потреба испитивања да ли нека функција има фиксних тачака и каква је њихова природа. Питање егзистенције решења неких једначина може се формулисати као питање постојања фиксних тачака за неке придружене функције. Банахова теорема о фиксној тачки гарантује постојање и јединственост фиксне тачке неког пресликавања из једног метричког простора у самог себе, и даје конструктивни метод за налажење те тачке.

ДЕФИНИЦИЈА 10. *Нека је $f : X \to X$ произвољно пресликавање. За тачку $x \in X$ кажемо да је фиксна (непокретна) тачка пресликавања $f : X \to X$ ако је $f(x) = x$.*

ПРИМЕР 13. *За пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) = x^2 - 12$ фиксне тачке су решења једначине $x^2 - 12 = x$ а то су $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$.* $\Diamond$

ПРИМЕР 14. *Нека је $A : C[0,1] \to C[0,1]$ дато са $A(f(x)) = f'(x)$. Пресликавање A има фиксну тачку $f \in C[0,1]$ дату са $f(x) = \mathrm{e}^x$.* $\Diamond$

ДЕФИНИЦИЈА 11. *За пресликавање $f : X \to X$ кажемо да је контракција метричког простора X ако постоји константа $q \in [0,1)$ таква да за произвољне $x, y \in X$ важи*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant q d(x,y).$$

Број q зове се коефицијент контракције.

Дакле, контракције пресликавају тачке тако да је удаљеност слика било ког пара тачака битно мања од удаљености тих тачака.

ПРИМЕР 15. *Пресликавање $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ дато са $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на основу Лагранжове теореме задовољава*

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant \frac{1}{1+c^2}|x-y|,$$

за неко $c \in \mathbb{R}^+$ и све $x, y \in \mathbb{R}$. Нека је $q = \frac{1}{1+c^2}$. Очигледно је $q \in [0,1)$ и ако посматрамо стандардну метрику на $\mathbb{R}$ имамо $d(f(x), f(y)) \leqslant q d(x,y)$, тј. f је контракција. $\Diamond$

ТЕОРЕМА 9. (БАНАХОВА ТЕОРЕМА О ФИКСНОЈ ТАЧКИ) *Ако је (X, d) комплетан метрички простор и $f : X \to X$ контракција са коефицијентом q, онда пресликавање f има јединствену фиксну тачку $y \in X$. Притом, тачка y је граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ чији је први члан x_1 произвољан, а остали чланови су дефинисани са $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geqslant 2$, и важи оцена*

$$d(x_n, y) \leqslant \frac{q^{n-1}}{1-\lambda} d(x_1, f(x_1)).$$

Услови Банахове теореме су довољни али не и потребни за постојање и јединственост фиксне тачке, што приказује следећи пример.

ПРИМЕР 16. *Пресликавање $f(x) = x^2$ има фиксну тачку на $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Наиме, $f(x) = x$ ако и само ако је $x = 0$ или $x = 1$ али како је $X = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, пресликавање f има јединствену фиксну тачку*

$x = 1$. *Међутим, услови теореме нису задовољени. Скуп* $X = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ *јесте комплетан, али не важи* $f : X \to X$ *јер је пресликавање* f *монотоно растуће и непрекидно па је*

$$f(X) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right] \not\subseteq \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Такође, f *није ни контракција јер како је*

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x - y||x + y|,$$

што је за $x = \frac{3}{2}$ *и* $y = \frac{1}{2}$ *испуњено* $d(f(x), f(y)) = 2 > d(x, y) = 1$. *Дакле, услови су довољни, али не и потребни.* $\diamondsuit$