Линеарна пресликавања нормираног простора у нормиран простор

Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани простори над истим пољем скалара $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Дефиниција 1. *Пресликавање $A : X \to Y$ је:*

1° *адитивно ако је $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ за све $x_1, x_2 \in X$;*

2° *хомогено ако је $A(\lambda x) = \lambda Ax$ за све $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$;*

3° *линеарно ако је адитивно и хомогено, тј. ако је*

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2, \quad x_1, x_2 \in X,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}.$$

Вредност пресликавања A у тачки x означаваћемо са Ax. Уместо термина пресликавање користићемо термин оператор.

Напомена. *Приметимо да за адитиван оператор $A : X \to Y$ важи $A(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$. Заиста,*

$$A(\mathbf{0}_X) = A(\mathbf{0}_X + \mathbf{0}_X) = A(\mathbf{0}_X) + A(\mathbf{0}_X),$$

одакле је $A(\mathbf{0}_X) = 2A(\mathbf{0}_X)$, па је $A(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$.

За нула вектор у векторском простору користили смо ознаку $\mathbf{0}$ док је са 0 означен реалан број нула. Сада су укључена два векторска простора па се зато наглашава простор коме припадају. Сматрамо да ће то убудуће бити јасно и зато ћемо писати једноставније $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Дефиниција 2. *Линеаран оператор $A : X \to \mathbb{F}$, где је $\mathbb{F}$ реално или комплексно поље скалара у зависности од тога да ли је X реалан или комплексан векторски простор, зове се линеарна функционела.*

Пример 1. *Навешћемо неке примере оператора.*

1) $A : \ell_2 \to \ell_2$ *дат са* $Ax = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ *је оператор на* ℓ_2.

2) $A : \mathbb{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ *дат са* $Ax = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{C}[0,1]$, *је функционела на* $\mathbb{C}[0,1]$.

Теорема 1. *Оператор $A : X \to Y$ је непрекидан на X ако и само ако је непрекидан у тачки $\mathbf{0} \in X$.*

Доказ. Ако је оператор A је непрекидан на X, тада је непрекидан у свакој тачки $x \in X$, па је непрекидан у тачки $\mathbf{0} \in X$

Нека је оператор A непрекидан у тачки $\mathbf{0} \in X$. Тада користећи дефиницију 9 област Конвергенција низова и $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, добијамо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(\|x\|_X < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|Ax\|_Y < \varepsilon). \tag{1}$$

Ако у (1) уместо x ставимо $x - x_0 \in X$, добијамо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(\|x - x_0\|_X < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|A(x - x_0)\|_Y < \varepsilon).$$

Оператор A је линеаран, па је $A(x - x_0) = A(x) - A(x_0)$, а тиме добијамо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(\|x - x_0\|_X < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|A(x) - A(x_0)\|_Y < \varepsilon),$$

односно A је непрекидан у тачки $x_0 \in X$. Како је $x_0 \in X$ произвољна тачка, следи да је A непрекидан на X. □

ДЕФИНИЦИЈА 3. *Линеарни оператор $A : X \to Y$ је ограничен ако постоји ненегативан број M такав да је*

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|, \quad x \in X.$$

НАПОМЕНА. *Приметимо да M није јединствен број.*

ТЕОРЕМА 2. *Линеаран оператор $A : X \to Y$ је непрекидан ако и само ако је ограничен.*

ДОКАЗ. Претпоставимо, најпре, да је линеаран оператор A непрекидан на X. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да је $\|Ax\|_Y < \varepsilon$ за свако $x \in X$ које задовољава $\|x\|_X < \delta(\varepsilon)$. Ако је $\varepsilon = 1$, тада $\|x\|_X < \delta(\varepsilon)$ повлачи $\|Ax\|_Y < 1$. Показаћемо да за свако $x \in X$ важи $\|Ax\|_Y \leqslant \frac{2}{\delta(1)}\|x\|_X$.

- Ако је $x = \mathbf{0}$, неједнакост тривијално важи.
- Ако је $x \neq \mathbf{0}$, нека је $x_1 = \frac{\delta(1)}{2\|x\|_X}x$. Тада је $\|x_1\|_X = \frac{\delta(1)}{2} < \delta(1)$, па је

$$\|Ax_1\|_Y = \Big\|A\Big(\frac{\delta(1)}{2\|x\|_X}x\Big)\Big\|_Y = \Big\|\frac{\delta(1)}{2\|x\|_X}Ax\Big\|_Y = \frac{\delta(1)}{2\|x\|_X}\|Ax\|_Y < 1.$$

  Из последње неједнакости закључујемо да је

$$\|Ax\|_Y < \frac{2\|x\|_X}{\delta(1)} = \frac{2}{\delta(1)}\|x\|_X,$$

  односно $M = \frac{2}{\delta(1)}$.

Нека је оператор A ограничен и докажимо да је непрекидан. Тада постоји $M > 0$ тако да је $\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X$, за свако $x \in X$, па за $\|x\| < \frac{\varepsilon}{M}$ је

$$\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Закључујемо да је оператор A непрекидан у тачки $\mathbf{0} \in X$, па на основу теореме 1. следи да је непрекидан на X. □

Скуп свих ограничених линеарних оператора $A : X \to Y$ означаваћемо са $L(X, Y)$. Специјално, ако је $X = Y$ користимо ознаку $L(X)$.

ПРИМЕР 2. *Нека је* $X = Y = \mathbb{R}^n$. *За* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *је* $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$. *Ортонормирана база је дата са* $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. *Свако* $x \in X$ *се може представити у облику* $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ *за неке скаларе* $x_k \in \mathbb{R}$.

Свако линеарно пресликавање $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *је ограничено, па самим тим и непрекидно. Заиста,* $Ax = A\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k A e_k$, *па користећи неједнакост Хелдера* ($p = q = 2$) *добијамо*

$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k \right\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \|Ae_k\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2_{\mathbb{R}^n}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2_{\mathbb{R}^n}} = M \|x\|_{\mathbb{R}^n},$$

где је $M = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2_{\mathbb{R}^n}}$.

ДЕФИНИЦИЈА 4. *Нека је* $A : X \to Y$ *линеаран и ограничен оператор. Инфимум бројева* M *за које важи неједнакост* $\|Ax\|_Y \leqslant M \|x\|_X$ *за свако* $x \in X$ *означаваћемо са* $\|A\|$.

НАПОМЕНА. *Приметимо да је инфимум скупа позитивних вредности ненегативан реалан број, тј.* $\|A\| \geqslant 0$.

Следећа теорема нам омогућава да за ограничен и линеаран оператор лако израчунамо ненегативан број $\|A\|$.

ТЕОРЕМА 3. *За сваки оператор* $A \in L(X, Y)$ *важи*

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

ДОКАЗ. Нека је $x \neq \mathbf{0}$ произвољан елемент из X и $\mathcal{M}$ скуп свих $M > 0$ за које важи неједнакост $\|Ax\|_Y \leqslant M \|x\|_X$, $x \in X$. За свако $M \in \mathcal{M}$ и $x \neq \mathbf{0}$ важи $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant M$, одакле је

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \inf\{M \mid M \in \mathcal{M}\} = \|A\|.$$

Дакле, за свако $x \neq \mathbf{0}$ важи $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\| \cdot \|x\|_X$. За $x = \mathbf{0}$ очигледно важи $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\| \cdot \|x\|_X$.

Ако је $x \neq \mathbf{0}$, тада из неједнакости $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \|A\|$, следи да је $\left\|\frac{1}{\|x\|_X} Ax\right\|_Y \leqslant \|A\|$, а из линеарности оператора A је $\left\|A\Big(\frac{x}{\|x\|_X}\Big)\right\|_Y \leqslant \|A\|$. Узимајући да је $y = \frac{x}{\|x\|_X} \in X$, лако се добија да је $\|y\|_X = 1$, па из последње неједнакости закључујемо да је

$$\sup_{\|y\|_X = 1} \|Ay\|_Y \leqslant \|A\|. \tag{2}$$

Из дефиниције $\|A\|$ следи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $x_\varepsilon \in X$ да је

$$\|Ax_\varepsilon\|_Y > (\|A\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|_X.$$

Сада је
$$\sup_{\|y\|_X=1}\|Ay\|_Y \geqslant \Big\|A\Big(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|_X}\Big)\Big\|_Y = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|_X}\|Ax_\varepsilon\|_Y > \|A\|-\varepsilon, \quad \varepsilon>0,$$
па је
$$\sup_{\|y\|_X=1}\|Ay\|_Y \geqslant \|A\|. \tag{3}$$
Из неједнакости (2) и (3) следи да је $\sup\limits_{\|y\|_X=1}\|Ay\|_Y = \|A\|$.

Даље је
$$\sup_{\substack{y\in X\\ y\neq\mathbf{0}}}\frac{\|Ay\|_Y}{\|y\|_X} = \sup_{\substack{y\in X\\ y\neq\mathbf{0}}}\Big\|A\Big(\frac{y}{\|y\|_X}\Big)\Big\|_Y = \sup_{\|y\|_X=1}\|Ay\|_Y = \|A\|,$$
па је $\|A\| = \sup\limits_{\substack{y\in X\\ y\neq\mathbf{0}}}\frac{\|Ay\|_Y}{\|y\|_X}$.

Коришћењем предходно доказаних једнакости имамо да је
$$\|A\| = \sup_{\substack{y\in X\\ y\neq\mathbf{0}}}\frac{\|Ay\|_Y}{\|y\|_X} \geqslant \sup_{\substack{\|y\|_X\leqslant 1\\ y\neq\mathbf{0}}}\frac{\|Ay\|_Y}{\|y\|_X} \geqslant \sup_{\|y\|_X\leqslant 1}\|Ay\|_Y$$
и
$$\sup_{\|y\|_X\leqslant 1}\|Ay\|_Y \geqslant \sup_{\|y\|_X=1}\|Ay\|_Y = \|A\|,$$
то је $\|A\| = \sup\limits_{\|y\|_X\leqslant 1}\|Ay\|_Y$. □

НАПОМЕНА. *До сада смо користили ознаку* $\|A\|$ *за ненегативан број за који важи неједнакост* $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\|\cdot\|x\|_X$ *за свако* $x\in X$*, односно за који важи*
$$\|A\| = \sup_{x\in X\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1}\|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y.$$

Наравно, ознака није случајно изабрана да буде иста као за норму. Сваком елементу $A\in L(X,Y)$ *се може доделити ненегативан број* $\|A\|$ *и тиме је на скупу* $L(X,Y)$ *добро дефинисано пресликавање* $A\mapsto\|A\|$*. У следећој теореми ћемо показати да број* $\|A\|$ *представља норму оператора* A *у простору свих ограничених линеарних оператора* $L(X,Y)$*.*

У простору $L(X,Y)$ се дефинише сабирање оператора и множење оператора скаларом на следећи начин:
$$(A+B)x = Ax+Bx, \qquad (\lambda A)x = \lambda(Ax), \quad A,B\in L(X,Y),\ \lambda\in\mathbb{F}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Пресликавање* $A\mapsto\|A\|$, $A\in L(X,Y)$*, дефинише норму на* $L(X,Y)$*.*

ДОКАЗ. 1. Докажимо да је $\|A\|=0$ ако и само ако је $A=\mathbf{0}$, тј. $Ax=\mathbf{0}$, за свако $x\in X$.

Ако је $\|A\|=0$, тада је $\|Ax\|_Y=0$ за свако $x\in X$, па по дефиницији норме у Y следи да је $Ax=\mathbf{0}$ за свако $x\in X$.

Ако је $Ax=\mathbf{0}$ за свако $x\in X$, јасно је из дефиниције броја $\|A\|$ да је $\|A\|=0$.

2. Докажимо да је $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ за свако $\alpha \in \mathbb{F}$ и $A \in L(X,Y)$. Користећи особине норме у простору Y и теорему 3. добијамо

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|\alpha Ax\|_Y = |\alpha| \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

3. Докажимо да је $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, $A, B \in L(X,Y)$.
Користећи неједнакост троугла за норму у простору Y и особине супремума, добијамо

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax+Bx\|_Y \leqslant \sup_{\|x\|_X=1} (\|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y)\\ &\leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\|_X=1} \|Bx\|_Y = \|A\| + \|B\|. \qquad \square\end{aligned}$$

Напомена. Приметимо да у доказу 1 код реченице „$A = \mathbf{0}$, тј. $Ax = \mathbf{0}$, за свако $x \in X$.“ прва ознака $\mathbf{0}$ представља нулу у простору $L(X,Y)$ а друга нулу у нормираном простору Y.

Надаље, да бисмо растеретили сам запис, нећемо наглашавати простор у којом се норма јавља. Наиме, уместо $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\| \cdot \|x\|_X$, $x \in X$, писаћемо $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$, $x \in X$, и подразумевати о којој је норми реч.

Пример 3. *Испитати да ли је оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$ дат са $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, линеаран и ограничен.*

Докажимо, најпре, линеарност. За произвољне низове $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из ℓ_2, и произвољне скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ важи

$$A(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \ldots) = \alpha(x_2, x_3, \ldots) + \beta(y_2, y_3, \ldots) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

одакле закључујемо да је оператор A линеаран.

Како је

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} |x_n|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2} = \|x\|,$$

имамо да је $\|Ax\| \leqslant 1 \cdot \|x\|$, па је $\|A\| \leqslant 1$, а самим тим оператор A је ограничен.

Ако би требало одредити норму оператора A, потребно је наћи елемент $x_0 \in \ell_2$ који би нам помогао да дођемо до неједнакости $\|A\| \geqslant 1$. Нека је $x_0 = (0,1,0,0,\ldots)$. Тада је $\|x_0\| = 1$ и $Ax_0 = (1,0,0,\ldots) = e_1$, па је $\|Ax_0\| = 1$. Самим тим је

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\| = 1,$$

односно $\|A\| \geqslant 1$.

Из $\|A\| \leqslant 1$ и $\|A\| \geqslant 1$, закључујемо да је $\|A\| = 1$.

Пример 4. *Доказати да је оператор $A : \mathbb{C}[0,1] \to \mathbb{C}[0,1]$ дат са $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(u)\,\mathrm{d}u$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, линеаран и ограничен и одредити његову норму.*

Приметимо прво да је оператор A добро дефинисан на целом $\mathbb{C}[0,1]$. Наиме, за непрекидну функцију $x \in \mathbb{C}[0,1]$ функција Ax је непрекидна на $[0,1]$ (подсетити се тврђења из Анализе 2).

За $x, y \in \mathbb{C}[0,1]$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *важи*

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y)(t) &= \int_0^t (\alpha x + \beta y)(u)\,\mathrm{d}u = \alpha \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u + \beta \int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \alpha Ax(t) + \beta Ay(t), \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$

па закључујемо да је

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

На основу Лагранжове теореме (подсетити се Анализе 2), за свако $t \in [0,1]$ *постоји* $t_0 \in [0,t]$ *да је* $Ax(t) = (t-0)x(t_0)$. *Даље је*

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} |(Ax)(t)| = \max_{t\in[0,1]} |t| \cdot |x(t_0)| = |x(t_0)| \leqslant \max_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|.$$

Дакле, $\|A\| \leqslant 1$, *па је оператор ограничен.*

За $x_0(t) = 1$, $t \in [0,1]$, *је* $\|x_0\| = 1$ *и* $\|Ax_0\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |t| = 1$, *па је*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\| = 1.$$

Из $\|A\| \leqslant 1$ *и* $\|A\| \geqslant 1$, *закључујемо да је* $\|A\| = 1$.

Навешћемо пример оператора који јесте линеаран али није ограничен.

Пример 5. *Нека је* X *нормирани простор свих полинома на* $[0,1]$ *са нормом* $\|P\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$. *Дефинишимо оператор А на простору* X *са* $AP(t) = P'(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Доказати да је оператор А линеаран, али не и ограничен.*

За произвољне полиноме P_1 *и* P_2 *дефинисане на* $[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *и за све* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *важи*

$$\begin{aligned} A\big(\alpha P_1(t) + \beta P_2(t)\big) &= \big(\alpha P_1(t) + \beta P_2(t)\big)' = \alpha P_1'(t) + \beta P_2'(t) \\ &= \alpha A\big(P_1(t)\big) + \beta A\big(P_2(t)\big), \end{aligned}$$

одакле закључујемо да је оператор А линеаран.

Докажимо да оператор А није ограничен. Уочимо низ полинома $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *дат са*

$$P_n(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тада је $\|P_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$ *и* $AP_n(t) = P_n'(t) = n\,t^{n-1}$, *па је* $\|AP_n\| = n$, $n \in \mathbb{N}$. *Закључујемо да не постоји реалан број* M *такав да је* $\|AP_n\| \leqslant M$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$. *Како је*

$$\|A\| = \sup_{\|P\|=1} \|AP\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|AP_n\|,$$

следи да оператор А није ограничен.

Напомена. Оператор диференцирања је врло важан оператор, који се често користи. У претходном задатку смо видели да је он неограничен. То нам указује на значај неограничених оператора. Међутим, њихове особине нећемо детаљније анализирати.