ФУНКЦИОНАЛНА АНАЛИЗА
Домаћи рад
13.04.2020. године

1. Навести пример простора и низа у том простору тако да низ конвергира слабо али не конвергира јако.

2. Да ли се у $\mathbb{R}$ разликују појмови јаке и слабе конвергенције? Одговор образложити!

3. Иститати да ли је простор $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, $x_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$, тј. низова комплексних бројева са само коначним бројем ненула чланова, пред-Хилбертов простор са скаларним производом

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   У случају да је дати простор пред-Хилбертов, испитати да ли је Хилбертов.

4. Навести пример пред-Хилбертовог простора и у њему ортогоналне векторе x и y и ортогоналне скупове E и F.

5. Испитатаи да ли је „бити ортогоналан“, тј. $\perp$, симетрична релација.

6. Доказати Питагорину теорему (теорема 3). Коме је тешко за $n \in \mathbb{N}$ нека проба да уради за два вектора x, y, тј. да докаже да ако су $x, y \in X$ ортогонални, тада важи

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

7. У просторима $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ навести примере неких скупова, а затим одредити њихове ортогоналне комплементе.

8. У простору $\mathcal{P}_2(x)$, полинома степена мањег од или једнаког са 2 са реалним коефлцијентима, дефинише се скаларни производ на следећи начин:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x, \quad P, Q \in \mathcal{P}_2(x).$$

   Најпре, доказати да овакво пресликавање задовољава особине скаларног производа а затим базу $\{1, x, x^2\}$ превести у ортонормирану базу користећи Грам-Шмитов поступак.

9. (За већу оцену) Доказати теорему 8.

10. (За већу оцену) Доказати теорему 9.