Банахови простори

Задатак 1. Доказати да је векторски простор $\mathcal{P}$ свих могућих полинома $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ $(a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}_0)$ један нормиран простор над пољем $\mathbb{K}$ са нормом

$$\|P\| = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

али да није Банахов.

Решење. Испитивање особина норме за пресликавање $P \mapsto \|P\|$ на простору $\mathcal{P}$ се оставља за самостални рад.

Покажимо сада да овај простор није Банахов. Уочимо низ полинома $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, дефинисан са

$$P_n(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2^2} + \cdots + \frac{t^n}{2^n}\,.$$

Тада за произвољне индексе $m \geqslant n \geqslant n_0$ важи

$$\|P_m - P_n\| = \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{2^\nu} < \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

па је низ $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев. Претпоставимо да низ $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира у $\mathcal{P}$ ка полиному $P(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_r t^r$. Тада за $n > r$ важи

$$\|P_n - P\| = |b_0 - 1| + \left|b_1 - \frac{1}{2}\right| + \cdots \left|b_r - \frac{1}{2^r}\right| + \frac{1}{2^{r+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{r+1}},$$

што је у контрадикцији са претпоставком да $P_n \to P$, $n \to +\infty$. Дакле, нормирани простор $\mathcal{P}$ није комплетан, а тиме ни Банахов. $\triangle$

Задатак 2. Доказати да је нормирани простор X комплетан ако и само ако је јединична сфера $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ комплетан скуп.

Решење. Нека је простор X комплетан. Како је S затворен скуп (јер је инверзна слика затвореног скупа затворен скуп, а S можемо представити у облику $S = \|\cdot\|^{-1}\{1\}$, при чему је $\|\cdot\|$ непрекидно пресликавање и $\{1\}$ затворен скуп) у комплетном метричком простору, он је комплетан, па је доказ у овом смеру завршен.

Претпоставимо сада да је скуп S комплетан. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан Кошијев низ у X. Из неједнакости $\big|\|x_m\| - \|x_n\|\big| \leqslant \|x_m - x_n\|$ следи да је $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ у $\mathbb{R}$. Како је простор $\mathbb{R}$ комплетан, то низ $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира у $\mathbb{R}$. Нека $\|x_n\| \to r$, $n \to +\infty$. Ако је $r = 0$, тада $x_n \to 0$, $n \to +\infty$, па низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира. Претпоставимо да је $r \neq 0$ и уочимо низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, дефинисан са $y_n = x_n/\|x_n\|$ за све n довољно велике $(n \geqslant k)$. Како $\|x_n\| \to r$, $n \to +\infty$, то постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $r/2 \leqslant \|x_n\|$ за све $n \geqslant n_0$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс $n(\varepsilon)$ тако да за све $m \geqslant n \geqslant n(\varepsilon)$ важи

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_n\| &= \left\|\frac{x_m}{\|x_m\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| = \left\|\frac{x_m - x_n}{\|x_m\|} + \frac{x_n}{\|x_m\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| \\
&\leqslant \frac{\|x_m - x_n\|}{\|x_m\|} + \frac{\|x_n\|}{\|x_m\|\|x_n\|}\big|\|x_m\| - \|x_n\|\big| \\
&\leqslant \frac{2\|x_m - x_n\|}{\|x_m\|} \leqslant \frac{2\varepsilon}{r/2} = \frac{4\varepsilon}{r},
\end{aligned}$$

што значи да је низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев у X. Како је $\|y_n\| = 1$, то је низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев на јединичној кугли S. Из комплетности скупа S следи да постоји $y \in S$ тако да $y_n \to y$, $n \to +\infty$, тј. $x_n/\|x_n\| \to y$, $n \to +\infty$. Како $\|x_n\| \to r$, $n \to +\infty$, то $x_n \to ry$, $n \to +\infty$. Пошто је X векторски простор, $y \in X$ и $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, то $ry \in X$, па низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира у X, што значи да је простор X комплетан. $\triangle$

Задатак 3. (а) Нека су $X_1, \dots, X_n$ нормирани простори. Доказати да је простор $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ нормирани простор ако за произвољан вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ дефинишемо норму са $\|x\| = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$.

(б) Доказати да је простор X са овако уведеном нормом Банахов ако и само ако су сви простори $X_1, \dots, X_n$ Банахови.

(в) Доказати да је простор X са овако уведеном нормом сепарабилан ако и само ако су сви простори $X_1, \dots, X_n$ сепарабилни.

Решење. (а) Оставља се студенту да провери особине норме.

(б) Претпоставимо најпре да је простор X Банахов. Нека је за свако фиксирано ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, $(x_\nu^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ у простору X_ν. Уочимо низ $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ у простору X дефинисан на следећи начин $x_m = (0, \dots, 0, x_\nu^{(m)}, 0 \dots, 0)$, $m \in \mathbb{N}$, при чему се $x_\nu^{(m)}$ налази на $\nu-$тој позицији. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m \geqslant k \geqslant n_0$ важи $\|x_m - x_k\| = \|x_\nu^{(m)} - x_\nu^{(k)}\| < \varepsilon$, што значи да је $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ у простору X. Како је X Банахов простор то низ $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ конвергира. Нека $x_m \to y = (y_1, \dots, y_\nu, \dots, y_n)$, $m \to +\infty$. Како је

$$\|y - x_m\| = \sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{n} \|y_k\| + \|x_\nu^{(m)} - y_\nu\|,$$

то је $y_k = 0$ за $k = 1, \dots, n$, $k \neq \nu$ и $x_\nu^{(m)} \to y_\nu$, $m \to +\infty$, у простору X_ν. Дакле, за свако $\nu = 1, \dots, n$ у простору X_ν произвољан Кошијев низ конвергира, па су сви простори X_ν, $\nu = 1, \dots, n$, комплетни.

Претпоставимо сада да су сви простори X_ν, $\nu = 1, \dots, n$, комплетни. Нека је $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ у простору X, $x_m = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да за све $m \geqslant k \geqslant n_0$ важи

$$\|x_m - x_k\| = \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu^{(m)} - x_\nu^{(k)}\| < \varepsilon,$$

па за свако $\nu = 1, \dots, n$ важи $\|x_\nu^{(m)} - x_\nu^{(k)}\| \leqslant \varepsilon$, $m \geqslant k \geqslant n_0$, тј. $(x_\nu^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ је Кошијев низ у простору X_ν, $\nu = 1, \dots, n$. Из комплетности простора X_ν, $\nu = 1, \dots, n$, следи да су сви низови $(x_\nu^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ конвергентни, односно постоје $y_\nu \in X_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$, такви да је $\|x_\nu^{(m)} - y_\nu\| < \varepsilon/n$, за m довољно велико ($m \geqslant N_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$). Нека је $y = (y_1, \dots, y_n)$ и $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$. Тада за све $m \geqslant N$ важи $\|x_m - y\| < \varepsilon$, па низ $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ конвергира у X, што значи да је простор X Банахов.

(в) Претпоставимо да је простор $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ сепарабилан. Нека је

$$B = \{(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

свуда густ скуп тачака у X. Доказаћемо да је тада скуп $B_\nu = \{x_\nu^{(m)} \mid m \in \mathbb{N}\}$ свуда густ скуп тачака у простору X_ν, $\nu = 1, \dots, n$. Нека је $x_\nu \in X_\nu$ произвољна тачка. Тада је $y_\nu = (0,\dots,0,x_\nu,0,\dots,0) \in X$, па за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс $m_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $\left\| y_\nu - \left(x_1^{(m_0)},\dots,x_n^{(m_0)}\right)\right\| < \varepsilon$, тј.

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{n} \|x_k^{(m_0)}\| + \|x_\nu - x_\nu^{(m_0)}\| < \varepsilon.$$

Из последње неједнакости следи да је $\|x_\nu - x_\nu^{(m_0)}\| < \varepsilon$, што значи да је скуп B_ν свуда густ у X_ν. Како је B_ν очигледно највише пребројив скуп, то је простор X_ν сепарабилан за све $\nu = 1,\dots,n$.

Претпоставимо сада да су простори X_ν, $\nu = 1,\dots,n$, сепарабилни. Нека је $B_\nu = \{x_\nu^{(m)} \mid m \in \mathbb{N}\}$ свуда густ скуп тачака у простору X_ν, $\nu = 1,\dots,n$. Уочимо скуп

$$B = \{(x_1^{(m_1)},\dots x_n^{(m_n)}) \mid m_1,\dots,m_n \in \mathbb{N}\}$$

у простору X. Очигледно је скуп B највише пребројив. Како је скуп B_ν свуда густ у X_ν, $\nu = 1,\dots,n$, то за сваку тачку $x = (x_1,\dots,x_n) \in X$ и све $\varepsilon > 0$ постоје индекси $m_1,\dots,m_n \in \mathbb{N}$ такви да је

$$\|x_\nu - x_\nu^{(m_\nu)}\| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad \nu = 1,\dots,n.$$

Тада је

$$\left\| x - \left(x_1^{(m_1)},\dots,x_n^{(m_n)}\right)\right\| = \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu - x_\nu^{(m_\nu)}\| < \varepsilon,$$

па је скуп B свуда густ у X. Дакле, X је сепарабилан простор. $\triangle$

Хилбертови простори

Задатак 1. Ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ узајамно ортогонални вектори у пред–Хилбертовом простору, доказати да важи једнакост

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2. \tag{1}$$

Осим тога, доказати да су вектори $x, y \neq 0$ узајамно ортогонални ако и само ако за произвољне скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ важи једнакост

$$\|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 = \|\alpha x + \beta y\|^2. \tag{2}$$

Решење. Ако су вектори $x_1, x_2, \ldots, x_n$ узајамно ортогонални, тада је $\langle x_\nu, x_k\rangle = 0$ за $\nu \neq k$, па се једнакост (1) добија директним рачунањем

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 &= \langle x_1 + x_2 + \cdots + x_n, x_1 + x_2 + \cdots + x_n\rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^{n}\langle x_\nu, x_\nu\rangle + \sum_{\nu\neq k}\langle x_\nu, x_k\rangle = \sum_{\nu=1}^{n}\|x_\nu\|^2.\end{aligned}$$

Претпоставимо сада да су вектори $x, y \neq 0$ узајамно ортогонални и да су α и β произвољни скалари. Тада је $\langle x, y\rangle = 0$, па је $\langle \alpha x, \beta y\rangle = \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle = 0$, тј. $\alpha x \perp \beta y$. Према томе, из једнакости (1), директно следи једнакост (2).

Претпоставимо сада да за произвољне $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ једнакост (2) важи. Тада је

$$\begin{aligned}\|\alpha x + \beta y\|^2 &= \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle \\ &= \langle \alpha x, \alpha x\rangle + \langle \beta y, \beta y\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle \alpha x, \beta y\rangle \\ &= \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle \alpha x, \beta y\rangle,\end{aligned}$$

одакле, због једнакости (2), следи $\mathrm{Re}\,\langle \alpha x, \beta y\rangle = 0$, тј. $\mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle) = 0$ за све $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Специјално, за $\alpha = \beta = 1$ добијамо $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = 0$, а за $\alpha = 1$, $\beta = i$ добијамо $\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = 0$, па је $\langle x, y\rangle = 0$, тј. $x \perp y$. △

Задатак 2. Доказати да је нормирани простор $\mathcal{H}$ пред–Хилбертов ако и само ако за све $x, y \in \mathcal{H}$ важи једнакост паралелограма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{$*$}$$

Решење. Нека је $\mathcal{H}$ пред–Хилбертов простор. Тада важи

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &\quad + \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Претпоставимо сада да важи једнакост $(*)$. Размотримо прво једноставнији случај $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Нека је

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big), \quad x,y \in \mathcal{H}.$$

Доказаћемо да је пресликавањем f дефинисан један скаларни производ у простору $\mathcal{H}$ сагласан са нормом простора $\mathcal{H}$.

Из $f(x,y) = f(y,x)$ и $f(x,x) = \|x\|^2$ следи да важе особине (СП1), (СП2) и (СП3).

За све $a,b,c \in \mathcal{H}$ важи једнакост (доказати!)

$$f(a+c,b) + f(a-c,b) = 2f(a,b), \tag{1}$$

одакле за $c = a$ добијамо $f(2a,b) = 2f(a,b)$, $a,b \in \mathcal{H}$. Сада за $a = (x_1+x_2)/2$, $c = (x_1-x_2)/2$ и $b = y$ добијамо

$$f(x_1,y) + f(x_2,y) = 2f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}, y\Big) = f(x_1+x_2,y),$$

тј. важи (СП5).

Претпоставимо да за неко $n \in \mathbb{N}$ и све $a,b \in \mathcal{H}$ важи $f(na,b) = nf(a,b)$ и $f((n-1)a,b) = (n-1)f(a,b)$. На основу те претпоставке и једнакости (1) следи

$$f((n+1)a,b) + f((n-1)a,b) = 2f(na,b) = 2nf(a,b),$$

односно

$$f((n+1)a,b) = (2n-(n-1))f(a,b) = (n+1)f(a,b).$$

На основу принципа математичке индукције је $f(na,b) = nf(a,b)$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Даље, за све $m \in \mathbb{N}$, на основу дефиниције функције f, добијамо

$$f\left(\frac{x}{m}, y\right) = \frac{1}{m^2} f(x,my) = \frac{1}{m^2} f(my,x) = \frac{1}{m^2}\cdot mf(x,y) = \frac{1}{m} f(x,y).$$

Очигледно је $f(-x,y) = -f(x,y)$, па следи да за све $\alpha \in \mathbb{Q}$ ($\alpha = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$) важи

$$f(\alpha x,y) = f\left(\frac{m}{n}x, y\right) = mf\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{m}{n} f(x,y) = \alpha f(x,y).$$

Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ произвољно. Тада постоји низ рационалних бројева (α_n) који конвергира ка α када $n \to +\infty$. Како је f непрекидна функција, за све $x,y \in \mathcal{H}$ је

$$\begin{aligned} f(\alpha x,y) &= f\big(\lim_{n\to+\infty} \alpha_n x, y\big) = \lim_{n\to+\infty} f(\alpha_n x,y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \alpha_n f(x,y) = \alpha f(x,y), \end{aligned}$$

тј. важи и (СП4). Према томе, f је скаларни производ у простору $\mathcal{H}$, сагласан са нормом тог простора, тј. простор $\mathcal{H}$ је пред–Хилбертов.

Размотримо сада случај $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. За претходно дефинисано пресликавање f дефинишимо

$$\langle x,y\rangle = f(x,y) - if(ix,y), \quad x,y \in \mathcal{H}.$$

Доказаћемо да је пресликавање $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ скаларни производ на простору $\mathcal{H}$.

Лако се добијају следеће једнакости

$$\begin{aligned} f(ix,iy) &= f(x,y),\\ f(ix,y) &= f(ix,i\bar{i}y) = f(x,\bar{i}y) = f(\bar{i}y,x) = -f(iy,x),\\ f(ix,x) &= f(ix,i\bar{i}x) = f(x,\bar{i}x) = f(\bar{i}x,x) = -f(ix,x), \end{aligned}$$

одакле је $f(ix,x) = 0$, па је $\langle x,x\rangle = f(x,x) - if(ix,x) = \|x\|^2$. Одавде директно следи да су особине (СП1) и (СП2) скаларног производа задовољене. Особина (СП5) се добија једноставно.

Како је

$$\begin{aligned} \langle ix,y\rangle &= f(ix,y) - if(-x,y) = f(ix,y) + if(x,y)\\ &= i\big(f(x,y) - if(ix,y)\big) = i\langle x,y\rangle, \end{aligned}$$

то је и особина (СП4) скаларног производа задовољена.

Коначно, задовољена је и особина (СП3) јер је

$$\begin{aligned} \langle y,x\rangle &= f(y,x) - if(iy,x) = f(x,y) - if(iy,i\bar{i}x)\\ &= f(x,y) - if(y,\bar{i}x) = f(x,y) - if(\bar{i}x,y) = f(x,y) + if(ix,y)\\ &= \overline{\langle x,y\rangle}, \end{aligned}$$

па је нормирани простор $\mathcal{H}$ пред–Хилбертов. △

Задатак 3. Нека је $\{e_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ ортонормирани систем у сепарабилном Хилбертовом простору $\mathcal{H}$. Доказати да векторски ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$ конвергира у $\mathcal{H}$ ако и само ако нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2$ конвергира.

Решење. Због комплетности простора $\mathcal{H}$, ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$ конвергира ако и само ако је низ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где је $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu e_\nu$, Кошијев. Тада за $m \geqslant n$ важи

$$\begin{aligned} \|s_m - s_n\|^2 &= \langle s_m - s_n, s_m - s_n\rangle = \left\langle \sum_{\nu=n+1}^{m} \alpha_\nu e_\nu, \sum_{\nu=n+1}^{m} \alpha_\nu e_\nu \right\rangle\\ &= \sum_{\nu=n+1}^{m} |\alpha_\nu|^2 = \bar{s}_m - \bar{s}_n, \end{aligned}$$

где је $\bar{s}_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^2$. Дакле, низ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев ако и само ако је низ $(\bar{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев, а то је испуњено ако и само ако ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2$ конвергира. △

Задатак 4. Доказати да се у векторски простор X реалних низова $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, таквих да је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$, може увести скаларни производ са

$$\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n y_n,$$

ако су $\lambda_n \in \mathbb{R}$, такви да је $0 < \lambda_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$ конвергира. Да ли је добијени простор Хилбертов?

Решење.Оставља се студенту да покаже да је пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на простору X.

Изаберимо низ $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који задовољава све услове задатка. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $N \geqslant n_0$ важи $\sum\limits_{\nu=N+1}^{+\infty} \lambda_\nu < \varepsilon$. Уочимо у простору X низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, где је $x_n = (\xi_\nu^{(n)})$, $\nu \in \mathbb{N}$, дат са

$$x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ пута}}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Тада за $m > n$ важи

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| = \sqrt{\langle x_m - x_n, x_m - x_n \rangle} &= \sqrt{\sum_{\nu=1}^{+\infty} \lambda_\nu \big(\xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)}\big)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m} \lambda_\nu}\,, \end{aligned}$$

па је за m, n довољно велике $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, тј. низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев у X.

Очигледно $x_n \to x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, $n \to +\infty$. Међутим, $x \notin X$ јер је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1^2 = +\infty$. Према томе, простор X није комплетан у односу на норму индуковану скаларним производом, па он није Хилбертов. $\triangle$