

ФУНКЦИОНАЛНА АНАЛИЗА

Домаћи рад

11.05.2020. године

1. Доказати лему 1.
2. Нека је $X = \{1, 2, 3\}$. Испитати да ли фамилија $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ представља σ -алгебру на скупу X .
3. Нека је $X = [0, 1]$. Испитати да ли фамилија $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, [0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1]\}$ представља σ -алгебру на скупу X .
4. Доказати лему 2.
5. Нека је $\mathcal{A}$ било која σ -алгебра на скупу $X \neq \emptyset$. Доказати да је $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ дато са:

$$1^\circ \mu(A) = \begin{cases} n, & A \in \mathcal{A} \text{ коначан скуп са } n \text{ елемената,} \\ +\infty, & A \in \mathcal{A} \text{ бесконачан скуп;} \end{cases}$$

$$2^\circ \mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ +\infty, & A \neq \emptyset, \end{cases}$$

мера на σ -алгебри $\mathcal{A}$.

НАПОМЕНА. Мера $\mu(A) = \begin{cases} n, & A \in \mathcal{A} \text{ коначан скуп са } n \text{ елемената,} \\ +\infty, & A \in \mathcal{A} \text{ бесконачан скуп,} \end{cases}$ се назива дискретна мера или мера пребројавања.

6. Нека је $X \neq \emptyset$ и $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ дата са

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ коначан или пребројив,} \\ 1, & \text{у супротном.} \end{cases}$$

Доказати да је функција μ^* спољна мера али није мера на $\mathcal{P}(X)$.

7. Одредити Легебову меру следећих скупова:

$$1^\circ A = [3, 7) \cap \mathbb{I};$$

$$2^\circ B = [3, 7] \cap \mathbb{Q};$$

$$3^\circ C = (3, 7) \cap [-1, 4);$$

$$4^\circ D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [3, 7 - \frac{1}{10^n});$$

$$5^\circ E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (3, 7 + \frac{1}{10^n}];$$

$$6^\circ F = [3, 7] \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$7^\circ G = (3, 7) \cap \left\{ 3 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\};$$

8. (За већу оцену) Доказати теорему Каратеодорија.