ФУНКЦИОНАЛНА АНАЛИЗА
Домаћи рад
27.04.2020. године

1. Доказати да је у примеру 1 задат низ ограничених линеарних оператора.

2. Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани простори. Доказати да ако је линеарни оператор $T : X \to Y$ бијективан, ограничен и има ограничен инверзни оператор $T^{-1}$, тада важи
$$\|T^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\|_X \leqslant \|Tx\|_Y \leqslant \|T\| \cdot \|x\|_X, \quad x \in X.$$

3. Нека је $M$ затворен потпростор Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ и $z \in M$ фиксирано. Доказати (директно, без примене неке теореме) да постоји неко $h \in \mathcal{H}$ тако да је $\langle x, h\rangle = \langle x, z\rangle$ за свако $x \in M$ и да је $\|h\| = \|z\|$, тј. направити екстензију скаларног производа са $M$ на $\mathcal{H}$.

4. Доказати да је пресликавање $J$ (дато у напомени после теореме 7) хомеоморфизам, антилинеарно и изометрично пресликавање.

5. Доказати да је у доказу теореме 7 са $\mathcal{N}(F) = \{x \in \mathcal{H} \mid F(x) = 0\}$ дат прави затворен потпростор од $\mathcal{H}$ и важи $\mathcal{H} = \mathcal{N}(F) \oplus \mathcal{N}(F)^{\perp}$.

6. (За већу оцену) Доказати Принцип униформне ограничености. (Доказ можете радити користећи било коју литературу. Ускладите ознаке са онима које смо ми користили. Вероватно ће бити потребе за неким помоћним тврђењима и доказима.)

7. (За већу оцену) Нека је $(X, \|\cdot\|_X)$ Банахов и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормиран простор. Доказати да ако је линеаран оператор $T : X \to Y$ бијективан, ограничен и има ограничен инверзни оператор $T^{-1}$, тада је $Y$ Банахов простор.